# EUCLIDES

## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN



15e JAARGANG 1938, Nr. 3.




P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

**Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken** verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

**Artikelen** ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

**Aan de schrijvers** van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

**Boeken ter bespreking** en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

---

INHOUD.

Dit volgt onmiddellijk uit de proposities 1 en 3. Is nl. (fig. 93) $\Gamma H$ het omgeschreven vierkant van den cirkel met diameter $AB$, is verder $\Delta E = 2\ AB$, $EZ = \frac{1}{7}\ AB$ dan vindt men

$$(A\Gamma Z,\ A\Gamma\Delta) = (22,7).$$

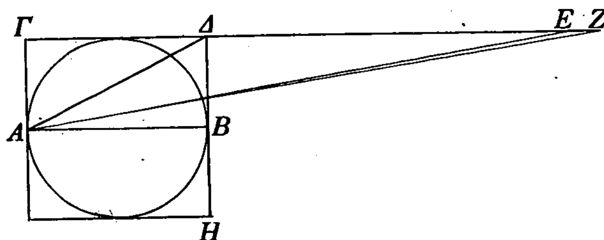



Fig. 93.

Nu is echter $\Gamma H = 4\ A\Gamma\Delta$ en $A\Gamma Z =$ Cirkel, dus

(Cirkel, Vierkant op den diameter) $= (11,14)$

5. Volgens een mededeeling van Heroon [26]) zou Archimedes in een (thans verloren) geschrift *Over Plinthiden* [27]) *en Cylinders* (*περὶ πλινθίδων καὶ κυλίνδρων*) een meer nauwkeurige benadering voor de verhouding van omtrek en diameter van een cirkel hebben gegeven. De in den Griekschen tekst opgegeven waarden zijn echter blijkbaar niet juist overgeleverd; herleidt men namelijk de beide meegedeelde grenzen, die elk als verhouding van groote getallen gegeven zijn, tot de decimale schrijfwijze, dan blijkt de onderste grens grooter te zijn dan de ware waarde van $\pi$ en de bovenste grens grooter dan de reeds bekende benadering $\frac{22}{7}$. Men heeft op verschillende wijzen getracht [28]), door het aanbrengen van kleine correcties in de bij Heroon voorkomende getallen het oorspronkelijke Archimedische resultaat te reconstrueeren; men komt dan inderdaad tot nauwkeuriger grenzen voor $\pi$ dan in de *Cirkelmeting* zijn gevonden.

Uit mathematisch oogpunt is het vinden van zulke nauwere grenzen volgens de methode der *Cirkelmeting* natuurlijk niet zoo heel belangrijk; het spreekt vanzelf, dat men, den ingeslagen weg

[26]) Heroon, *Metrica* (noot 9 van blz. 104) I, 26. pag. 66.

[27]) Volgens Heroon, *Definitiones (Heronis Opera* IV; noot 12 van blz 105) Def. 113 (pag. 70) is een plinthis een rechthoekig parallelepipedum, waarvan de lengte kleiner is dan de breedte en de diepte.

[28]) Men zie hierover T. L. Heath, *Greek Mathematics* I, 232. E. Hoppe, *Die zweite Methode des Archimedes zur Berechnung von* $\pi$. Archiv. f. Gesch. d. Naturw. u. d. Techn. IX (1922) 104—107.

vervolgend, steeds dichter tot de ware waarde van $\pi$ moet naderen. De groote waarde van het in de *Cirkelmeting* bereikte resultaat ligt echter in de opmerkelijk goede benadering van $\pi$, die men met behulp van zoo eenvoudige getallen als 22 en 7 kan uitdrukken. Een wezenlijke vooruitgang ten opzichte hiervan was eerst te verwachten door de opstelling van nieuwe benaderingsmethoden, die minder rekenwerk zouden vereischen, dan die van Archimedes met zich meebrengt; dat is echter eerst aan Chr. Huygens [29]) gelukt.

---

## HOOFDSTUK VII.

## OVER CONOIDEN EN SPHAEROIDEN.

In dit werk worden stellingen afgeleid over de inhouden van segmenten van conoiden en sphaeroiden, d.w.z. van de lichamen, ingesloten door een plat vlak en het oppervlak van hetzij een orthoconoide (d.i. een omwentelingsparaboloide), hetzij een amblyconoide (d.i. een blad van een tweebladige omwentelingshyperboloide), hetzij een verlengde of afgeplatte sphaeroide (d.i. een omwentelingsellipsoide). Archimedes behandelt telkens eerst het geval, dat het segment recht is, d.w.z. dat het snijvlak loodrecht op de omwentelingsas staat, om dan telkens een nieuwe propositie te wijden aan het scheeve segment, waarbij het snijvlak een willekeurigen stand ten opzichte van de omwentelingsas heeft. We zullen ons ter vereenvoudiging van de weergave beperken tot de behandeling van het algemeene geval van het scheeve segment, omdat het andere daaruit telkens door specialiseeren is af te leiden. Voor de gebruikte terminologie (top, basis, as, verlengde as, diameter van het segment enz.) raadplege men III; 6, 21—23.

De inhoudsbepalingen berusten alle op de compressiemethode (III; 8, 2); in en om de te behandelen lichamen worden figuren geconstrueerd, bestaande uit op elkaar gestapelde cylinderschijven, waarvan de inhoud kan worden bepaald op grond van stellingen over den cylinder en zijn deelen. Voor de toepassing van de

---

[29]) Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*. Oeuvres Complètes XII (Den Haag 1910) 91—181.

methode van den indirecten limietovergang moet dan telkens bewezen worden, dat het verschil van de inhouden van het omgeschreven lichaam ($C_n$) en van het ingeschreven lichaam ($I_n$) door keuze van het aantal schijven kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven inhoud. De mogelijkheid hiervan wordt uitgesproken voor rechte segmenten in Prop. 19, voor scheeve in Prop. 20, welke laatste als volgt luidt:

P r o p o s i t i e 20.

*Wanneer een segment gegeven is, dat door een vlak niet loodrecht op de as is afgesneden van een der beide conoiden of van een*

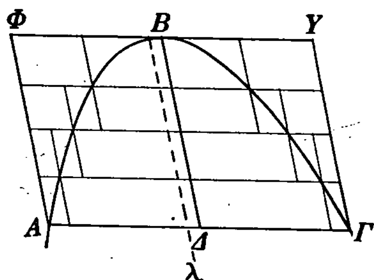



Fig. 94*a*.

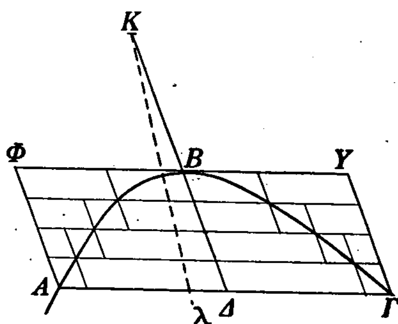



Fig. 94*b*.

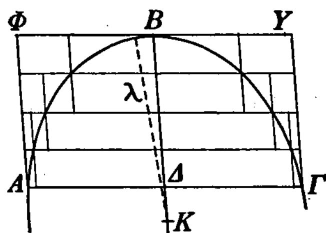



Fig. 94*c*.

*der beide sphaeroiden (zoodat het niet grooter is dan de helft der sphaeroide), is het mogelijk, in het segment een lichaam te beschrijven, bestaande uit cylinderschijven met gelijke hoogten en om het segment een ander dergelijk lichaam, zoodanig dat het omgeschreven lichaam het ingeschrevene overtreft met een bedrag kleiner dan een willekeurig voorgeschreven ruimtelijke grootheid.* (fig. 94).

Bewijs: Laat (ook in de volgende proposities) het vlak van teekening het vlak door de omwentelingsas $\lambda$ loodrecht op het snijvlak zijn, de doorsnede hiervan met het vlak van teekening $A\Gamma$. De doorsnede van het snijvlak met het lichaam is een oxytome met diameter $A\Gamma$ (III; 6, 31; 6, 41; 6, 51—52). Zij $B$ de top van het segment, dat de rechte $A\Gamma$ met de meridiaansnede bepaalt, dus het punt, waar de raaklijn aan de snede parallel is aan $A\Gamma$ en $\Delta$ het midden van $A\Gamma$; voor het geval van de orthoconoide is dan $B\Delta$ parallel aan den diameter; voor de amblyconoide en de sphaeroiden gaat $B\Delta$ door het centrum. Er bestaat nu (III; 3, 4) een scheeve cirkelcylinder met as $B\Delta$, waarvan de oxytome met diameter $A\Gamma$ basiskromme is en waarvan het geheele oppervlak buiten het beschouwde conoid- of sphaeroidsegment ligt (III; 6, 32; 6, 42; 6, 551). Pas nu op de as van het segment $B\Delta$ dichotomie (III; 0,5) toe en breng door de verkregen deelpunten vlakken parallel aan het vlak van de basis van het segment. De doorsneden van deze vlakken met de segmenten zijn onderling gelijkvormige oxytomes (III; 6,61), die telkens basis zijn van een omgeschreven en van een ingeschreven cylinderschijf, waarvan de as langs $B\Delta$ ligt. Al de verkregen cylinderschijven hebben dezelfde hoogte. Door dus de som $C_n$ van alle omgeschreven schijven te verminderen met de som $I_n$ van alle ingeschrevene, houdt men de omgeschreven schijf over, die de oxytome met diameter $A\Gamma$ tot basis heeft. Daar de hoogte hiervan door voortgezette dichotomie uit de hoogte van het gegeven segment is ontstaan, is zij, door de dichotomie ver genoeg voort te zetten, kleiner te maken dan een willekeurig voorgeschreven lengte, zoodat dus ook de beschouwde inhoud kleiner te maken is dan een willekeurig voorgeschreven ruimtelijke grootheid. Bewezen is dus, dat bij een willekeurig voorgeschreven ruimtelijke grootheid $\delta$ een getal $m$ zoo te bepalen is, dat voor $n = 2^m$ de ongelijkheid geldt

$$C_n - I_n < \delta.$$

Dezelfde uitspraak schrijft men tegenwoordig verkort

$$\lim_{n \to \infty} (C_n - I_n) = 0.$$

Na deze algemeene inleidende propositie wordt in Prop. 21 een recht, in Prop. 22 een scheef segment van een orthoconoide beschouwd.

Propositie 22 (fig. 95).

*Indien door een vlak niet loodrecht op de as een segment van een orthoconoide wordt afgesneden, zal dit segment anderhalfmaal zoo groot zijn als het kegelsegment, dat dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as.*

Laat het aangenomen vlak van teekening de orthoconoide snijden volgens de orthotome $AB\Gamma$. Zij $\Psi$ een kegel, die anderhalfmaal zoo groot is als het kegelsegment $BA\Gamma$, **K** de cylinderschijf $A\Gamma Y\Phi$, dan is (III; 6, 11)

$$\mathbf{K} = 3.\ \text{kegelsegment}\ BA\Gamma = 2\Psi.$$

Te bewijzen is: $\Psi$ = conoidsegment $BA\Gamma$. Stel, dat dit onjuist is, dan is

$$\text{òf}\ BA\Gamma > \Psi\ \text{(I)}\ \text{òf}\ BA\Gamma < \Psi\ \text{(II)}$$

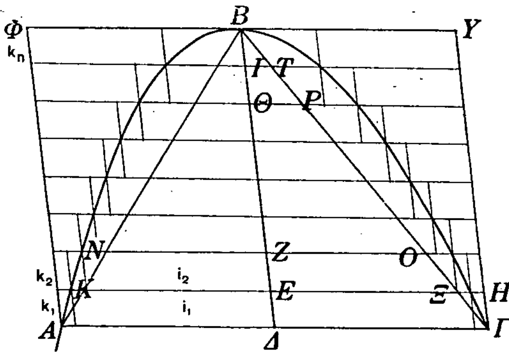



Fig. 95.

Geval I. Zij $BA\Gamma > \Psi$. Zet nu de dichotomie van $B\Delta$ (C.S. 20) zoover voort, dat

$$C_n - I_n < BA\Gamma - \Psi$$

dan is a fortiori $\quad BA\Gamma - I_n < BA\Gamma - \Psi.$

dus $\quad I_n > \Psi.$

Vergelijk nu telkens de ingeschreven cylinderschijven $i_1$, $i_2$ enz. (van $\Delta$ af gerekend) met de tusschen dezelfde vlakken gelegen deelschijven $k_1$, $k_2$ enz. van de cylinderschijf **K**.

De verhouding der cylinderschijven $i_1$ en $k_1$, die dezelfde hoogte hebben, is gelijk aan de verhouding hunner bases. Daar deze bases gelijkvormige oxytomes zijn met diameters resp. $EK$ en $\Delta A$, is dus

$$(i_1, k_1) = [\mathbf{T}(EK), \mathbf{T}(\Delta A)] = (BE, B\Delta) = (E\Xi, \Delta\Gamma)$$

Evenzoo is

$(i_2, k_2) = [\mathbf{T}(ZN), \mathbf{T}(EH)] = [\mathbf{T}(ZN), \mathbf{T}(\Delta\Gamma)] = (BZ, B\Delta) = (ZO, \Delta\Gamma)$

enz. tot

$$(i_{n-1}, k_{n-1}) = (IT, \Delta\Gamma)$$

Archimedes concludeert hieruit nu tot

$$(i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1}, k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}) = \\ = (E\Xi + ZO + \dots + IT, (n-1)\,\Delta\Gamma). \quad (1)$$

Algebraisch is deze conclusie evident; immers $k_1 = k_2$ enz.; door optelling van alle evenredigheden met eerste lid $(i_m, k_m)$ krijgt men

$$\frac{i_1 + \dots i_{n-1}}{k_1} = \frac{E\Xi + \dots IT}{\Delta\Gamma}, \text{ dus ook}$$

$$\frac{i_1 + \dots i_{n-1}}{k_1 + \dots k_{n-1}} = \frac{E\Xi + \dots IT}{(n-1)\Delta\Gamma}.$$

Archimedes zal zich voor het trekken van deze conclusie hebben moeten beroepen op **C.S.** 1 (III; 7,21), door daarin te beschouwen

als rij III: $k_1, k_2 \dots k_{n-1}$
als rij I: $i_1, i_2 \dots i_{n-1}$
als rij II: $E\Xi, ZO \dots IT$
als rij IV: $\Delta\Gamma, \Delta\Gamma \dots \Delta\Gamma$.

Hieruit volgt nu inderdaad de evenredigheid (1); men heeft immers

$$(i_1, k_1) = (E\Xi, \Delta\Gamma) \text{ enz. èn } (i_1, i_2) = (E\Xi, ZO) \text{ enz.}$$

Archimedes merkt nu verder op, dat de lijnstukken $IT, \Theta P \dots\dots E\Xi, \Delta\Gamma$ een rekenkundige reeks vormen, waarvan het verschil gelijk is aan den kleinsten term en hij concludeert hieruit tot

$$(n-1)\,\Delta\Gamma > 2\,(E\Xi + ZO + \dots + IT) \quad (2)$$

Deze conclusie is blijkbaar onjuist; de beide leden zijn gelijk. De bedoeling is natuurlijk geweest, de arithmetische hulpstelling III; 7,1 toe te passen; deze leidt echter tot

$$n \,.\, \Delta\Gamma > 2\,(E\Xi + \dots + IT) \quad (3)$$

Archimedes besluit nu uit (2) in verband met (1) tot

$$k_1 + \dots k_{n-1} > 2\,(i + \dots i_{n-1})$$

en dus a fortiori tot

$$\text{Cylinderschijf } \mathbf{K} > 2\,I_n$$

dus $\Psi > I_n$ in strijd met de onderstelling.

Dit resultaat is juist. Immers wegens $k_1 = k_2$ enz. kan men voor (1) ook schrijven:

$(i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1}, k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = (E\Xi + . IT, n . \varDelta\Gamma)$

en dan volgt uit (3) inderdaad

$$\mathbf{K} > 2\, I_n$$

Geval II. Zij nu $BA\Gamma < \Psi$. Zet nu de dichotomie van $B\varDelta$ voort totdat

$$C_n - I_n < \Psi - BA\Gamma$$

dan is a fortiori

$$C_n - BA\Gamma < \Psi - BA\Gamma$$

dus $$C_n < \Psi$$

Vergelijkt men nu de omgeschreven cylinderschijven $c_1, c_2 \ldots$ met de schijven $k_1, k_2, \ldots$ dan blijkt

$$c_1 = k_1 \text{ dus } (c_1, k_1) = (\varDelta\Gamma, \varDelta\Gamma)$$

$$(c_2, k_2) = [\mathbf{T}(EK), \mathbf{T}(EH)] = [\mathbf{T}(EK), \mathbf{T}(\varDelta\Gamma)] = (BE, B\varDelta) = (E\Xi, \varDelta\Gamma) \text{ enz. tot } (c_n, k_n) = (IT, \varDelta\Gamma).$$

Nu is weer wegens **C.S.** 1 (III, 7,21)

$$(c_1 + c_2 + \ldots + c_n, k_1 + k_2 \ldots + k_n) = (IT \ldots + \varDelta\Gamma, n . \varDelta\Gamma)$$

en wegens de hulpstelling (III; 7,1)

$$2(IT + \ldots + \varDelta\Gamma) > n . \varDelta\Gamma$$

dus

$$2(c_1 + c_2 \ldots + c_n) > k_1 + k_2 \ldots + k_n = \mathbf{K}.$$

dus $$c_1 + \ldots c_n = C_n > \Psi.$$

in strijd met de onderstelling.

Algebraische formuleering:

Is $I$ de inhoud van het beschouwde segment der orthoconoide, dan is Prop. 20 aequivalent met

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n.$$

Zij in Prop. 22 de vergelijking der orthotome ten opzichte van het assenstelsel $B\ (Y\varDelta)$ : $x^2 = py$.

Zij $B\varDelta = y_0$, $\Gamma\varDelta = x_0$ . $B\varDelta$ zij verdeeld in $n$ gelijke deelen (bij Archimedes is $n = 2$). Zij de inhoud van de $m^e$ ingeschreven cylinderschijf (van $B$ af gerekend) $i_m$, dan is

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{y}{y_0} = \frac{m}{n}$$

dus

$$i_n = \frac{m}{n^2}\mathbf{K}$$

Dus is

$$I_n = \sum_1^{n-1} i_m = \mathbf{K}\frac{1+2+\ldots.(n-1)}{n^2}$$

dus

$$I = \mathbf{K}.\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2}\mathbf{K}.$$

De proposities 23 en 24 bevatten corollaria van de gevonden stellingen over den inhoud van een segment eener orthoconoide.

Propositie 23.

*Indien van een orthoconoide twee segmenten worden afgesneden door vlakken, waarvan het eene loodrecht op de as staat en het andere niet, en de assen der segmenten zijn gelijk, dan zullen ook de segmenten gelijk zijn.*

Bewijs: Laat (fig. 96) in een vlak van teekening door de twee

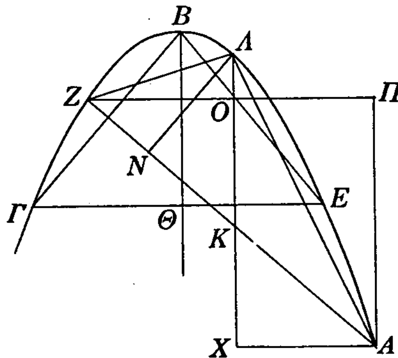



Fig. 96.

segmentassen $B\Gamma E$ en $\Lambda ZA$ de doorsneden met de segmenten zijn, $B\Theta$ en $\Lambda K$ de gelijke assen. De stelling zal wegens **C.S.** 22 bewezen zijn, wanneer de gelijkheid van den kegel $B\Gamma E$ en het kegelsegment $\Lambda ZA$ aangetoond zal zijn. De basis van den kegel is een cirkel met diameter $E\Gamma$, die van het segment een oxytome met groote as $AZ$ en kleine as $\Pi Z$ (III; 6,31); de hoogte van het eerste lichaam is $B\Theta$, die van het tweede $\Lambda N \perp AZ$. De oppervlakten der bases verhouden zich als $\mathbf{T}(\Gamma E)$ en $\mathbf{O}(AZ, \Pi Z)$ (III; 3,11), welke verhouding dezelfde is als

$$[\mathbf{T}(\Theta E),\ \mathbf{O}(AK,\ AX)].$$

# BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR

Dr. J. G. RUTGERS
Hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft

## A. HET PLATTE VLAK

(99 FIGUREN EN 256 VRAAGSTUKKEN MET ANTWOORDEN)

## B. DE RUIMTE

(40 FIGUREN EN 146 VRAAGSTUKKEN MET ANTWOORDEN)

TWEEDE DRUK

Prijs geb. f 9.00

Voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tot 1 Febr. 1939 f 8.—

P. NOORDHOFF N.V. - 1938 - GRONINGEN - BATAVIA

# INHOUD.

Blz.

HOOFDSTUK III.



HOOFDSTUK IV.



HOOFDSTUK V.



HOOFDSTUK VI.

Blz.

## HOOFDSTUK V.



## HOOFDSTUK VI.

## § 4. POOLVERWANTSCHAP BIJ DE OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD. WEDERKERIGE POOLFIGUREN T.O.V. $O^2$.

**82.** Eigenschap: **De meetkundige plaats van het punt Q, harmonisch toegevoegd aan een gegeven punt *P* t.o.v. de snijpunten van een veranderlijke rechte door *P* met een willekeurig oppervlak van den tweeden graad, is in het algemeen een plat vlak. Dit vlak heet het poolvlak $\pi$ van *P* t.o.v. $O^2$; *P* heet de pool van $\pi$ t.o.v. $O^2$.**

Zij $P \equiv (x_1, y_1, z_1, t_1)$, de vergelijking van $O^2$: $F(x, y, z, t) = 0$, en $Q \equiv (x_2, y_2, z_2, t_2)$ een punt der gevraagde meetkundige plaats. Een willekeurig punt der rechte $PQ$ heeft dan tot homogene coördinaten: $x_1 + \mu x_2$, $y_1 + \mu y_2$, $z_1 + \mu z_2$, $t_1 + \mu t_2$; dit punt stelt een der snijpunten voor van $PQ$ met $O^2$, indien $\mu$ voldoet aan:

$$F(x_1 + \mu x_2, y_1 + \mu y_2, z_1 + \mu z_2, t_1 + \mu t_2) = 0,$$

of ontwikkeld naar machten van $\mu$ [zie (145), p. 398 en n°. 80, p. 401]:

$$F(x_1, y_1, z_1, t_1) + 2\varphi_{12} . \mu + F(x_2, y_2, z_2, t_2) . \mu^2 = 0, \quad . \; . \qquad (153)$$

waarin we de volgende gedaanten aan $\varphi_{12}$ kunnen geven:

$$2\varphi_{12} = x_1 F'_{x_2} + y_1 F'_{y_2} + z_1 F'_{z_2} + t_1 F'_{t_2} =$$
$$= x_2 F'_{x_1} + y_2 F'_{y_1} + z_2 F'_{z_1} + t_2 F'_{t_1} \quad . \; . \; . \; . \qquad (154)$$

$$\varphi_{12} = a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) +$$
$$+ a_{13}(x_1z_2 + x_2z_1) + a_{23}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{14}(x_1t_2 + x_2t_1) +$$
$$+ a_{24}(y_1t_2 + y_2t_1) + a_{34}(z_1t_2 + z_2t_1) + a_{44}t_1t_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (154a)$$

De beide wortels $\mu_1$ en $\mu_2$ der vierkantsvergelijking (153) bepalen dus de snijpunten $S_1$ en $S_2$ van $PQ$ met $O^2$. Opdat nu $Q$ harmonisch toegevoegd is aan $P$ t.o.v. $S_1$ en $S_2$, of omgekeerd $S_1$ en $S_2$ harmonisch aan elkaar zijn toegevoegd t.o.v. $P$ en $Q$, moet tussen $\mu_1$ en $\mu_2$ de betrekking bestaan: $\mu_1 + \mu_2 = 0$ (zie n°. 20, p. 300); dit is het geval, indien $\varphi_{12} = 0$ is. Elk punt $Q(x_2, y_2, z_2, t_2)$ is dus harmonisch toegevoegd aan $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ t.o.v. de snijpunten van $PQ$ met $O^2$, indien $x_2, y_2, z_2$ en $t_2$ voldoen aan de betrekking:

$$x_1 F'_{x_2} + y_1 F'_{y_2} + z_1 F'_{z_2} + t_1 F'_{t_2} = 0,$$
$$\text{of } x_2 F'_{x_1} + y_2 F'_{y_1} + z_2 F'_{z_1} + t_2 F'_{t_1} = 0, \quad . \; . \qquad (155)$$

of uitgeschreven:

$$a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1z_2 + x_2z_1) +$$
$$+ a_{23}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{14}(x_1t_2 + x_2t_1) + a_{24}(y_1t_2 + y_2t_1) +$$
$$+ a_{34}(z_1t_2 + z_2t_1) + a_{44}t_1t_2 = 0. \quad . \; . \; . \qquad (155a)$$

Hieruit volgt de vergelijking van de meetkundige plaats van

VRAAGSTUKKEN.

94. Bepaal de vergelijkingen van die raakvlakken aan de twee oppervlakken

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=p^2 \text{ en } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=q^2,$$

welke evenwijdig zijn aan het vlak $Ax+By+Cz=0$.

Bewijs, dat de raakpunten dier vier vlakken op één rechte liggen, en geef de vergelijkingen van deze rechte.

*Antw.* $Ax+By+Cz\pm p\sqrt{a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2}=0$.

$$Ax+By+Cz\pm q\sqrt{a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2}=0;$$

$$\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=-\frac{z}{c^2C}.$$

95. Bepaal de meetkundige plaats van de toppen der kegels, die de ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ omhullen en die het vlak $XOY$ volgens een gelijkzijdige hyperbool snijden.

*Antw.* $\frac{x^2}{a^2b^2}+\frac{y^2}{a^2b^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ (omwentelingsellipsoïde).

96. Met een punt $P$ als top beschrijft men een kegel, welke de ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ omhult. De aanrakingskromme is richtlijn van een tweeden kegel die den oorsprong van coördinaten tot top heeft. Op welke meetkundige plaats moet het punt $P$ gelegen zijn, opdat deze laatste kegel door vlakken, evenwijdig aan het $xy$-vlak, volgens cirkels gesneden wordt?

*Antw.* Is $P\equiv(x_1, y_1, z_1)$, dan kegel: $\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$; meetk. plaats: $x=0$, $a^2y^2=b^2(a^2-b^2)$ en $y=0$, $b^2x^2=a^2(b^2-a^2)$.

97. Bepaal de poolfiguur van den bol $x^2+y^2+z^2=r^2$ t.o.v. de hyperbolische paraboloïde $xy=az$.

*Antw.* De tweebladige omwentelingshyperboloïde $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{r^2}=-1$.

## § 5. ONDERZOEK NAAR HET MIDDELPUNT VAN $O^2$.

**90.** We hebben als middelpunt van $O^2$ gedefinieerd elk punt, dat als pool van het vlak op oneindig t.o.v. $O^2$ kan worden beschouwd. Verder bleek reeds [n°. 83, (159), p. 409], dat voor ieder middelpunt van $O^2$ geldt:

$$F'_x=0, \quad F'_y=0, \quad F'_z=0. \qquad (159)$$

We zullen thans allereerst aantonen, dat een in het eindige gelegen middelpunt $(x_0, y_0, z_0)$ tevens **punt van symmetrie** is. Verschuiven we nl. het assenkruis evenwijdig naar het punt $(x_0, y_0, z_0)$ als nieuwen oorsprong, dan gaat de vergelijking van $O^2$ : $f(x, y, z)=u_2(x, y, z)+$ $+u_1(x, y, z)+u_0=0$ door substitutie van de transformatie-

§ 8. TOEGEVOEGDE MIDDELVLAKKEN EN -LIJNEN. HERLEIDING VAN DE ALGEMENE VERGELIJKING ($a_{12}$, $a_{13}$, $a_{23}$ NIET GELIJKTIJDIG NUL) VAN EEN CENTRAAL-OPPERVLAK VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

**99.** Het poolvlak van een punt op oneindig $P^\infty$ t.o.v. $O^2$ (zonder of met dubbelpunten) is, zo het een bepaald vlak is (dus $P^\infty$ geen dubbelpunt van $O^2$), een vlak, dat door elk middelpunt van $O^2$ gaat, daar dit nl. de pool is van het vlak op oneindig t.o.v. $O^2$ (zie n⁰. 84, p. 408). Blijkbaar is dit middel- of diametraalvlak, als meetkundige plaats der punten harmonisch toegevoegd aan $P^\infty$ t.o.v. de snijpunten van iedere rechte door $P^\infty$ met $O^2$, de meetkundige plaats van de middens der evenwijdige koorden, waarvan de richting samenvalt met die van $P^\infty$; men noemt dit vlak het **middel- of diametraalvlak toegevoegd aan de richting van $P^\infty$.**

Zijn $a$, $b$ en $c$ de richtingsgetallen der rechten door $P^\infty$, dan wordt $P^\infty$ voorgesteld door $(a, b, c, 0)$, zodat de **vergelijking van het diametraalvlak toegevoegd aan de richting ($a$, $b$, $c$)** is:

$$aF'_x + bF'_y + cF'_z = 0, \text{ of } \boldsymbol{af'_x + bf'_y + cf'_z = 0}, \quad . \; . \quad (179)$$

waarin $f(x, y, z) = 0$ de niet-homogene vergelijking van $O^2$ voorstelt.

Ook uit deze vergelijking blijkt, dat elk middelpunt van $O^2$ in dit vlak ligt; hierbij wordt eveneens ondersteld, dat het vlak niet onbepaald is.

In het bijzonder stelt dus **$f'_x = 0$ het middelvlak** voor, **toegevoegd aan de richting der x-as** ($b = c = 0$), **$f'_y = 0$ het middelvlak toegevoegd aan de richting der y-as** ($a = c = 0$), en evenzo **$f'_z = 0$ het middelvlak toegevoegd aan de richting der z-as** ($a = b = 0$). Deze drie vergelijkingen deden dienst bij de bepaling van het middelpunt van $O^2$.

Men kan ook analytisch aantonen: **de meetkundige plaats van de middens der koorden van $O^2$, die onderling evenwijdig zijn, is het diametraalvlak toegevoegd aan de richting dier koorden.** Stel, dat $(a, b, c)$ de richting der koorden aangeeft en dat $(x_0, y_0, z_0)$ het midden van een dier koorden is, dan zijn de vergelijkingen dezer koorde:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ (stel } = \lambda),$$

en dus haar parametervergelijkingen:

$$x = x_0 + a\lambda, \quad y = y_0 + b\lambda, \quad z = z_0 + c\lambda.$$

Voor de snijpunten $(x_1, y_1, z_1)$ en $(x_2, y_2, z_2)$ dezer koorde met $O^2$: $f(x, y, z) = 0$, die behoren bij de waarden $\lambda_1$ en $\lambda_2$, welke volgen uit de vergelijking:

$$f(x_0 + a\lambda, \quad y_0 + b\lambda, \quad z_0 + c\lambda) = 0, \quad . \; . \; .$$

Ondergetekende, **abonné op**

**Compositio Mathematica**
**Nieuw Archief voor Wiskunde**
**„Christiaan Huygens"**
**„N. T. voor Wiskunde"**
**„Euclides"**

verzoekt toezending van 1 exemplaar:

**RUTGERS, Beknopte Analytische Meetkunde**
geb. à f 8.00. (gewone prijs is f 9.00)

**BREMEKAMP, Partiëele Differentiaalvergelijkingen**
ingenaaid à f 4.00
geb. . . . à f 4.85
(gewone prijs is f 4.90, geb. f 5.75)

door bemiddeling van de boekhandel
direct per post,

..............................................................................................................

Naam: Woonplaats:

.................................................... ....................................................

Iedere abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld vóór 1 Febr. 1939 voor Indië vóór 1 April 1939.

S.v.p. door te halen wat *niet* wordt verlangd.

**BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN**

1½ cts.
postzegel

# N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

**POSTBUS 39**

**GRONINGEN**

**Giro Ned. Bk. No. 1858**
**Post Giro No. 6593**

PROSPECTUS

# Partiëele Differentiaalvergelijkingen

MET TOEPASSINGEN

NAAR HET COLLEGE
AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT

DOOR

**Dr. H. BREMEKAMP**
Hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool

---

No. XX NOORDHOFF'S VERZAMELING VAN WISKUNDIGE WERKEN

Prijs f 4,90, geb. f 5.75
Voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tot 1 Febr. 1939 f 4,00, geb. f 4,85

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN, BATAVIA

**Ook verkrijgbaar door de boekhandel**
en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij Noordhoff-Kolff.
Laan Holle 7, Batavia C

Dit boek is ontstaan door den wensch, om den Delftschen studenten, die het college over partiëele differentiaalvergelijkingen volgen, een leiddraad bij die studie te geven. Er zijn over dit onderwerp verschillende en zeer uiteenloopende voortreffelijke werken. Het is voor studenten, die in dit vak ook maar eenigszins dieper willen doordringen, van groote waarde, dat zij met boeken als Riemann-Weber, Die Partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik (zoowel in de oude bewerking van Weber als in de nieuwe van Frank en v. Mises), Courant und Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Webster, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Picard, Traité d'analyse, om er slechts enkele te noemen, kennis maken. Ik laat dan ook nooit na, die werken op mijn college te noemen. Studenten echter, voor wie de wiskunde en haar methoden slechts hulpmiddel blijven en die aan de studie van dat vak slechts een beperkten tijd kunnen wijden, hebben behoefte aan een beknopter handleiding.

Kenners zullen opmerken, dat dit boek toch nog meer bevat dan men in een éénjarigen cursus (October-Mei) van twee uur per week kan doorwerken, toch heb ik vrij wel alles, wat hier voorkomt, in den loop der jaren wel op het college behandeld. De behandelde stof is namelijk in den loop der jaren nogal verschillend geweest, afhankelijk van de studierichting der hoorders en van mijn zich wijzigende opvattingen. Naar aanleiding van gesprekken met verschillende collega's is het college meer en meer zoo ingericht, dat de belangrijkste mathematische hulpmiddelen voor den physicus en den ingenieur, voor zoover ze niet in Delft in afzonderlijke colleges behandeld worden, ter sprake komen. Dat verklaart, dat in dit boek verschillende zaken besproken worden, die eigenlijk niet door den titel gedekt worden, ik noem b.v. Fourieranalyse, functies van Bessel, bolfuncties. (Andere onderwerpen, waaraan men in dit verband allicht zou denken, functietheorie, vectorvelden, operatorische rekenwijze, worden in Delft op speciale colleges behandeld).

Ook worden in dit boek een aantal begrippen, die uit wiskundig oogpunt belangrijk zijn, zooals b.v. uniforme convergentie, in het kort ontwikkeld. De theoretisch werkende ingenieur moet die m.i. ontmoet hebben, eensdeels al, om zijn weg te kunnen vinden in de vaklitteratuur, andersdeels om het zoover te kunnen brengen, dat hij uitkomsten van eigen onderzoek in behoorlijken vorm kan bekend maken. Ik heb mij echter beperkt tot uniforme convergentie van reeksen; dat is, dunkt mij, voor het aanbrengen van het begrip voldoende. Deze beperking brengt echter mee, dat herhaaldelijk gebruik wordt gemaakt van stellingen, die niet in het boek worden bewezen en die toch ook niet bij het elementair

onderwijs thuis behooren. Ik heb mij afgevraagd, of in die gevallen een litteratuurverwijzing niet op zijn plaats was. Ik ben daartoe echter niet overgegaan, behalve in heel enkele gevallen, waar een beroep wordt gedaan op stellingen, die men niet als gemeen goed der wiskundigen kan beschouwen. Ik meen echter, dat op deze wijze nergens de begrijpelijkheid van het betoog op hinderlijke wijze wordt verstoord. In dit verband wil ik nog een enkel woord zeggen over het opnemen van eenige eenvoudige existentiebewijzen. Men kan meenen, dat die voor den ingenieur en voor ieder, wien het om de toepassingen te doen is, van geen belang zijn. Ik houd het echter voor belangrijk, dat deze studeerenden althans met het begrip existentiebewijs kennis maken, al was het alleen al, opdat zij niet later, als zij in de litteratuur een dergelijk bewijs ontmoeten, het artikel, waarin het voorkomt, direct ter zijde leggen met de opmerking „dat is een soort wiskunde, die ik niet ken". Iets dergelijks geldt voor bepaaldheidsstellingen.

Het boek is op deze wijze een wiskundeboek gebleven, al is van hoofdstuk VII af aan de toepassingen een ruime plaats ingeruimd. Wellicht is het op deze wijze behalve voor aanstaande ingenieurs ook voor studenten in de wiskunde en in het bijzonder in de mathematische physica van eenige waarde als inleiding tot verdere studie.

In de eerste hoofdstukken zijn hier en daar aanteekeningen toegevoegd (veelal met kleinere letter gedrukt) om voor de Delftsche studenten de aansluiting aan het elementaire college te verbeteren. De vraagstukken, die overal door den text verspreid zijn, zijn nogal van verschillenden aard. Verscheidene dienen als oefenmateriaal, sommige geven aanvulling en uitbreiding van het behandelde, nu en dan wordt de afleiding van een in den text toegepaste hulpstelling gevraagd, of een andere methode (doorgaans functietheoretische) aangeduid, om tot een in den text bewezen resultaat te komen. De gemengde vraagstukken aan het eind geven toepassingen en uitbreidingen van het behandelde, bij sommige is een aanwijzing voor de oplossing gegeven. Over het geheel zullen deze vraagstukken wel tamelijk moeilijk blijken. Verschillende ervan zijn, soms in eenigszins gewijzigden vorm, al vroeger opgegeven in de Opgaven van het Wiskundig Genootschap.

Enkele moeilijke paragrafen zijn met een * aangewezen.

Ten slotte betuig ik mijn dank aan mijn assistente Ir. C. Hamakers, die het manuscript en de drukproeven meegelezen heeft en aan de firma Noordhoff, die voor een behoorlijke uitvoering heeft zorg gedragen.

Delft, October 1938. H. BREMEKAMP.

# INHOUD.

# HOOFDSTUK XVII.

## TRILLINGEN VAN EEN GESPANNEN VLIES.

**§ 1.** Wij beschouwen een volkomen buigzaam vlies, dat aan den rand vastgehouden wordt en waarin overal een in alle richtingen gelijke spanning bestaat, waarvan we het bedrag per lengte-eenheid $S$ noemen. We denken ons, dat in den evenwichtsstand het vlies in een plat vlak ligt, dat wij als $xy$-vlak kiezen. Wij beperken ons op overeenkomstige wijze, als we bij de snaar deden, tot kleine uitwijkingen uit den evenwichtsstand.

Om de bewegingsvergelijking te verkrijgen, beschouwen wij een rechthoekig element van het vlies met zijden $dx$ en $dy$. Als we de uitwijking in de richting loodrecht op het vlak van het vlies $u$ noemen, vinden we evenals in hoofdstuk XIII § 1 voor de resultante der spanningen

$$S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

Deze resultante geeft, als er geen uitwendige krachten zijn, het element, waarvan de massa $\mu\, dx\, dy$ bedraagt, de versnelling $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Wij hebben dan dus:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

waarbij $a^2=\frac{S}{\mu}$.

Als er een uitwendig krachtenstelsel is, waardoor op het beschouwde element een kracht $P(x, y, t)\,\mu\, dx\, dy$ in de richting der $z$-as werkt, vinden we:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=P(x, y, t). \tag{2}$$

Wij zullen ons tot de behandeling der vergelijking (1) beperken. De overgang tot (2) kan beschouwd worden als uitbreiding van hetgeen we bij het overeenkomstige vraagstuk over de gespannen snaar gedaan hebben.

Aan den rand is $u=0$, en als beginvoorwaarde kunnen wij stellen

$u = \varphi(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x, y)$, waarbij $\varphi$ en $\psi$ gegeven functies zijn voor punten binnen den gegeven rand.

Wij zoeken nu weer particuliere oplossingen van (1), die aan de gegeven randvoorwaarden voldoen, en die geschreven kunnen worden in de gedaante $u = UT$, waarbij $T$ alleen van $t$ afhangt en $U$ alleen van de coördinaten, waarbij dus $U$ aan de randvoorwaarden voldoet. Het zal weer blijken, dat er oneindig veel zulke oplossingen zijn, de daarbij optredende functies $U$ heeten de eigenfuncties van ons vraagstuk. De bewegingsvormen, die aan deze oplossingen beantwoorden, heeten eigentrillingen. Deze eigentrillingen zullen wij vooreerst bestudeeren. Door substitutie in (1) vinden we:

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{a^2}{U} \triangle U.$$

Hieruit blijkt weer, dat beide leden aan een constante gelijk moeten zijn, en daar $T$ en $\frac{d^2T}{dt^2}$ tegengesteld teeken moeten hebben, aan een negatieve constante, noemen we deze $-\lambda_k^2$, dan vinden we, als we de hierbij behoorende particuliere oplossing ook door den index $k$ onderscheiden:

$$T_k = A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t. \tag{3}$$

De getallen $\lambda_k$ noemen we de eigenwaarden van het probleem, $\lambda_k$ is namelijk niet willekeurig, maar moet zoo bepaald worden, dat de vergelijking

$$\triangle U_k = -\frac{\lambda_k^2}{a^2} U_k \tag{4}$$

oplossingen toelaat, die aan de randvoorwaarden voldoen. Wij zijn hiermee teruggekomen tot de vergelijking, die we in hoofdstuk XIII beschouwd hebben. De verdere behandeling is afhankelijk van den aard van den rand.

**§ 2.** Wij behandelen vooreerst het geval, dat de rand een rechthoek is; het ligt dan voor de hand met rechthoekige coördinaten te werken en twee der zijden van den rechthoek als $x$-as en als $y$-as te kiezen. Wij trachten nu aan (4) te voldoen door te stellen $U_k = X_k Y_k$, waarbij $X_k$ alleen van $x$ en $Y_k$ alleen van $y$ afhangt. Wij vinden dan:

waarin $r$ den afstand van het punt $Q$ (in het ruimte-element $d\tau_Q$ gelegen tot $P$ voorstelt en $\Phi(Q)$ een willekeurige functie der coördinaten van $Q$ is, echter zoo, dat de integraal uitgestrekt over de geheele ruimte beteekenis heeft, een oplossing van (3) is en bewijs, dat deze de eigenschap heeft, dat voor $t = 0$, $T_P = \Phi(P)$.

Wij zullen nu nog een voorbeeld behandelen, waarbij een oplossing bepaald wordt, die aan een grensvoorwaarde van andere gedaante voldoet. Wij denken ons een homogeen lichaam, dat aan zijn oppervlak door geleiding in warmtewisseling staat met de op temperatuur nul gehouden omgeving, dan geldt in ieder punt van het oppervlak $\frac{\partial T}{\partial n} = -hT$, waarin $n$ de richting der naar buiten getrokken normaal aanwijst en $h$ een positieve constante is. Wij zullen als voorbeeld kiezen het geval, dat het geleidende lichaam een bol is en dat daarin de aanvangstemperatuur een functie is alleen van $r$, den afstand tot het middelpunt. Dit zal dan ook het geval zijn voor de temperatuur $T$ op een willekeurig tijdstip. Stellen we met het oog op vergelijking (4) $Tr = U$, dan wordt onze grensvoorwaarde:

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=R} - \frac{U(R)}{R^2} = -\frac{h}{R}\,U(R)$$

Wij hebben dus een oplossing te zoeken van de vergelijking:

$$a^2\,\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

die voor $t = 0$, $0 < r < R$ is bepaald door

$$U = \varphi(r),$$

en voor $t > 0$, $r = R$ voldoet aan:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{1}{R} - h\right) U,$$

terwijl, daar $T$ in het middelpunt van den bol eindig moet blijven, voor $r = 0$, $U = 0$.

Wij trachten weer, deze oplossing op te bouwen met behulp van particuliere oplossingen van de gedaante

$$U_m = V_m W_m,$$

waarbij $U_m$ alleen van $r$ en $W_m$ alleen van $t$ afhangt; wij vinden dan:

$$\frac{a^2}{V_m}\,\frac{d^2 V_m}{dr^2} = \frac{1}{W_m}\,\frac{dW_m}{dt} = -a^2\mu^2_m,$$

dus $U_m = e^{-a^2\mu_m^2 t}(A_m \sin \mu_m r + B_m \cos \mu_m r)$.

De voorwaarde $U_m = 0$, voor $r = 0$, geeft $B_m = 0$.

De voorwaarde $\frac{\partial U_m}{\partial r} = \left(\frac{1}{R} - h\right) U_m$, voor $r = R$, geeft:

$$\mu_m \cos \mu_m R = \left(\frac{1}{R} - h\right) \sin \mu_m R,$$

dus, als we $\frac{1}{R} - h = \frac{1}{bR}$ stellen, zijn de waarden $\mu_m$ bepaald, als de wortels der transcendente vergelijking:

$$\operatorname{tg} \mu_m R = b\, \mu_m R. \tag{5}$$

Het is uit een figuur onmiddellijk te zien, dat deze vergelijking oneindig veel reëele wortels heeft.

Wij stellen nu:

$$U = \sum_0^\infty A_m e^{-a^2\mu_m^2 t} \sin \mu_m r.$$

Daar de wortels van (5) twee aan twee elkaars tegengestelde zijn, kan men zich tot de positieve wortels beperken. Wij moeten nu hebben:

$$\varphi(r) = \sum_0^\infty A_m \sin \mu_m r, \text{ voor } 0 < r < R. \tag{6}$$

Wij komen dus weer tot een ontwikkeling analoog aan de reeks van Fourier. Wat de bepaling der coëfficiënten $A_m$ betreft hebben wij weer voor de functies $\sin \mu_m r$ de orthogonaliteitsbetrekking:

$$\int_0^R \sin \mu_m r \sin \mu_n r\, dr = 0 \text{ voor } m \neq n.$$

Wij hebben namelijk

$$\int_0^R \sin \mu_m r \sin \mu_m r\, dr = \tfrac{1}{2} \int_0^R \{\cos(\mu_m - \mu_n) r - \cos(\mu_m + \mu_n) r\} dr =$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{\sin(\mu_m - \mu_n) R}{\mu_m - \mu_n} - \tfrac{1}{2} \frac{\sin(\mu_m + \mu_n) R}{\mu_m + \mu_n} =$$

$$-\frac{\mu_m \cos \mu_m R \sin \mu_m R + \mu_n \cos \mu_n R \sin \mu_m R}{(\mu_m^2 - \mu_n^2)} =$$

$$= \frac{\cos \mu_m R \cos \mu_n R}{um\mu)^2 - \mu\,^2)} (-\mu_m \operatorname{tg} \mu_n R + \mu_n \operatorname{tg} \mu_m R) = 0.$$

Nu is, als $M$ de orthia van den diameter $B\Theta$ is, de orthia $\mu$ voor de scheeve toevoeging van de orthotome aan de rechte $AK$ bepaald door

$$(\mu, M) = [\mathbf{T}(AK), \mathbf{T}(AX)] \quad \text{(III; 2, 321)}.$$

Dus is wegens $B\Theta = AK$

$$[\mathbf{T}(AK), \mathbf{T}(E\Theta)] = (\mu, M) = [\mathbf{T}(AK), \mathbf{T}(AX)]$$

dus $$E\Theta = AX.$$

De verhouding van de bases van kegel en kegelsegment is dus $(AX, AK)$, welke verhouding dezelfde is als $(AN, AK)$ of $(AN, B\Theta)$. De bases verhouden zich dus omgekeerd als de hoogten, waaruit de gelijkheid der inhouden volgt (III; 6,01).

P r o p o s i t i e 24.

*Indien van een orthoconoide twee segmenten worden afgesneden door willekeurige vlakken, zullen de segmenten tot elkander dezelfde reden hebben als de vierkanten op hun assen.*

Bewijs: Contrueer de rechte segmenten, die opv. dezelfde hoogten hebben als de gegeven segmenten. Wegens de voorgaande propositie zal het voldoende zijn, indien de stelling voor twee zulke segmenten bewezen wordt. Daarvoor is ze echter een onmiddellijk gevolg van **C.S.** 22, omdat immers de inhouden der ingeschreven kegels zich, zooals men gemakkelijk inziet, als de vierkanten op de hoogten verhouden.

De proposities 25 en 26 handelen opv. over den inhoud van een recht en van een scheef segment van een amblyconoide. We kunnen ons weer beperken tot de afleiding voor het scheeve segment in

P r o p o s i t i e 26.

*Indien door een vlak niet loodrecht op de as een segment wordt afgesneden van een amblyconoide, dan zal dit tot het kegelsegment, dat dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as, de reden hebben, die de som van de as van het segment en het drievoud van de verlengde as heeft tot de som van de as en het tweevoud van de verlengde as.*

Laat het vlak van teekening de amblyconoide snijden volgens de amblytome $AB\Gamma$ (fig. 97).

Zij $\Theta$ de top van den omvattenden kegel der conoide, dus het centrum van de amblytome $AB\Gamma$; zij verder $B\Theta = \Theta Z = ZH$. Laat $\Psi$ een kegel zijn, welks inhoud zich tot den inhoud van het

kegelsegment $BA\Gamma$ verhoudt als de twee in de propositie genoemde lengten, dus als $H\Delta$ tot $Z\Delta$. Te bewijzen is dan dus, dat het conoid-

Fig. 97.

segment gelijk is aan $\Psi$. Is nu **K** de cylinderschijf $A\Gamma Y\Phi$ en is $BP = \frac{1}{3}\Delta B$, dus $H\Delta = 3\Theta P$, dan is

$$(\mathbf{K}, \text{ kegelsegment } BA\Gamma) = (H\Delta, \Theta P)$$
$$(\text{kegelsegment}, \Psi) = (Z\Delta, H\Delta)$$

dus *ex aequali*: $(\mathbf{K}, \Psi) = (Z\Delta, \Theta P)$

Is nu het conoidsegment niet gelijk aan $\Psi$, dan is het òf grooter òf kleiner dan $\Psi$.

Geval I. Zij ten eerste $BA\Gamma > \Psi$. Zet nu (**C.S.** 20) de dichotomie van $B\Delta$ zoover voort, dat

$$C_n - I_n < BA\Gamma - \Psi \text{ dan is a fortiori}$$
$$BA\Gamma - I_n < BA\Gamma - \Psi \text{ dus } I_n > \Psi.$$

Vergelijk nu telkens de ingeschreven cylinderschijven $i_1$, $i_2 \ldots i_{n-1}$ met de tusschen dezelfde vlakken gelegen deelschijven $k_1$, $k_2 \ldots$ van de cylinderschijf **K**.

De verhouding van de cylinderschijven $i_1$ en $k_1$, die dezelfde hoogte hebben, is gelijk aan de verhouding hunner bases, dus van de gelijkvormige oxytomes met homologe diameters $EA$ en $\Delta\Gamma$. Dus is

$$(i_1, k_1) = [\mathbf{T}(EA), \mathbf{T}(\Delta\Gamma)] = [\mathbf{O}(BE, ZE), \mathbf{O}(B\Delta, Z\Delta)]$$

Evenzoo

$$(i_2, k_2) = [\mathbf{O}(BX, ZX), \mathbf{O}(B\Delta, Z\Delta)]$$

enz. tot

$$(i_{n-1}, k_{n-1}) = [\mathbf{O}(BI, ZI), \mathbf{O}(B\Delta, Z\Delta)].$$

Hieruit volgt nu als in **C.S.** 22 door toepassing van **C.S.** I, (III; 7,21)

$$(i_1 + i_2 \ldots . i_{n-1},\ n \,.\, k_1) = (I_n,\ \mathbf{K}) =$$
$$= [\mathbf{O}(BE,\ ZE) + \ldots . + \mathbf{O}(BI, ZI),\ n \,.\, \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta)].$$

De rij der rechthoeken

$$\mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta),\ \mathbf{O}(BE,\ ZE) \ldots . \mathbf{O}(BI,\ ZI)$$

voldoet blijkbaar aan de voorwaarden, genoemd in de arithmetische hulpstelling **C. S.** 2 (III; 7,4). Ze zijn alle hyperbolisch aangepast aan $BZ$ met quadratische excessen, welker zijden $B\varDelta$ $BE$ . . . $BI$ een rekenkundige reeks vormen met verschil $BI$. Hieruit volgt:

$$(B\varDelta + BZ,\ \tfrac{1}{3}B\varDelta + \tfrac{1}{2}BZ) < [(n \,.\, \mathbf{O}(B\varDelta, Z\varDelta), \mathbf{O}(BE, ZE) + .. + \mathbf{O}(BI, ZI)]$$

of

$$(Z\varDelta,\ \Theta P) < (\mathbf{K},\ I_n)$$

dus

$$(\mathbf{K},\ \Psi) < (\mathbf{K},\ I_n)$$

dus $I_n < \Psi$ in strijd met de onderstelling.

Geval II. Zij ten tweede $BA\Gamma < \Psi$. Zet nu de dichotomie van $B\varDelta$ zoolang voort dat

$$C_n - I_n < \Psi - BA\Gamma$$

dan is a fortiori

$$C_n - BA\Gamma < \Psi - BA\Gamma$$

dus

$$\text{dus } C_n < \Psi.$$

Vergelijkt men nu weer de omgeschreven cylinderschijven $c_1$, $c_2$ . . . .met de schijven $k_1$, $k_2$ . . . . dan blijkt

$$c_1 = k_1 \text{ dus } (c_1,\ k_1) = [\mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta),\ \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta)]$$
$$(c_2,\ k_2) = [\mathbf{O}(BE,\ ZE),\ \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta)]$$
$$\vdots$$
$$(c_n,\ k_n) = [\mathbf{O}(BI,\ ZI),\ \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta)]$$

dus

$$(c_1 + \ldots c_n,\ n \,.\, k_1) = [\mathbf{O}(B\varDelta, Z\varDelta) + \ldots \mathbf{O}(BI,\ ZI),\ n \,.\, \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta)].$$

Nu is dus door toepassing van **C.S.** 2 (III; 7,4) als boven

$$[n \,.\, \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta),\ \mathbf{O}(B\varDelta,\ Z\varDelta) + \ldots . + \mathbf{O}(BI,\ ZI)] < (Z\varDelta,\ \Theta P)$$

dus

$$(\mathbf{K}, C_n) < (Z\Delta, \Theta P) = (\mathbf{K}, \Psi)$$

dus $C_n > \Psi$ in strijd met de onderstelling.

Algebraisch: Zij ten opzichte van het assenstelsel $B$ $(\Phi\Delta)$ de vergelijking van de hyperbool in den twee-abscissenvorm

$$\frac{x^2}{y(y+2a)} = C$$

waarin $a = B\Theta$. Zij verder $\Delta A = x_0$, $B\Delta = y_0$ en laat $B\Delta$ verdeeld zijn in $n$ gelijke deelen. Is dan de inhoud van de $m^e$ ingeschreven cylinderschijf (van $B$ af gerekend) $i_m$, dan is

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{y(y+2a)}{y_0(y_0+2a)} = \frac{\frac{m}{n}y_0\left[\frac{m}{n}y_0 + 2a\right]}{y_0(y_0+2a)}$$

of

$$i_m = \mathbf{K}\frac{m(my_0+2na)}{n^3(y_0+2a)}$$

Dus is

$$I_n = \mathbf{K}\frac{y_0[1^2+2^2+\ldots.(n-1)^2] + 2na\,[1+2+\ldots.(n-1)]}{n^3(y_0+2a)}$$

Nu is $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Wij zouden nu schrijven

$$I_n = \mathbf{K}\frac{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)y_0 + n^2(n-1)a}{n^3(y_0+2a)}$$

waaruit volgt

$$I = \mathbf{K}\frac{\frac{1}{3}y_0 + a}{y_0+2a} = \tfrac{1}{3}\mathbf{K}\frac{y_0+3a}{y_0+2a}$$

Het overige deel van het werk *Over Conoiden en Sphaeroiden* is gewijd aan de bepaling van de inhoud van een sphaeroidsegment. Archimedes besteedt eerst twee afzonderlijke proposities aan het bijzondere geval, dat het vlak, waardoor het segment wordt afgesneden, door het centrum der sphaeroide gaat, waarbij het, zooals in **C.S.** 18 (III; 6,56) blijkt, den inhoud van het geheele lichaam halveert. De inhoudsbepaling wordt in Prop. 27 uitgevoerd voor een snijvlak loodrecht op de as, in Prop. 28 voor een willekeurig snijvlak door het centrum. We behandelen weer de laatste propositie:

Propositie 28.

*Indien een sphaeroide gesneden wordt met een vlak door het centrum, dat niet loodrecht op de as staat, is de helft van de sphaeroide tweemaal zoo groot als het kegelsegment, dat dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as.*

Laat het vlak van teekening, door de omwentelingsas loodrecht op het snijvlak gebracht, de sphaeroide snijden volgens de oxytome $AB\Gamma\Delta$ met centrum $\Theta$ en het snijvlak volgens $A\Gamma$ (fig. 98).

Laat $\Psi$ een kegel zijn, welks inhoud het dubbele is van den inhoud van het kegelsegment $BA\Gamma$, **K** de cylinderschijf $AK\Lambda\Gamma$, dan is blijkbaar

$$\mathbf{K} = \tfrac{3}{2}\Psi.$$

Is nu de halve sphaeroide $BA\Gamma$ niet gelijk aan $\Psi$, dan is zij òf grooter òf kleiner dan $\Psi$.

Geval I). Zij $BA\Gamma > \Psi$. Men kan nu door voortgezette dichotomie van $B\Theta$ op de wijze, die in de Prop. 22 en 26 is toegelicht, een ingeschreven lichaam verkrijgen, waarvoor

$$I_n > \Psi.$$

Vergelijking van de ingeschreven cylinderschijven $i_1$, $i_2$ . . . met de overeenkomstige deelschijven $k_1$, $k_2$ . . . van **K** geeft nu

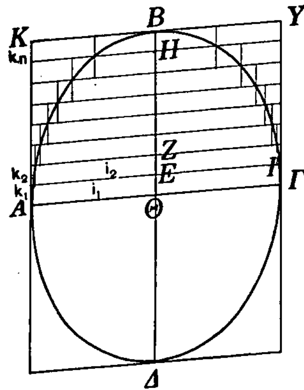



Fig. 98.

$$(i_1, k_1) = [\mathbf{T}(EI), \mathbf{T}(\Theta A)] = [\mathbf{O}(BE, \Delta E), \mathbf{T}(B\Theta)] \quad \text{(III; 3, 0)}$$
$$(i_2, k_2) = \qquad [\mathbf{O}(BZ, \Delta Z), \mathbf{T}(B\Theta)]$$
$$(i_{n-1}, k_{n-1}) \qquad [\mathbf{O}(BH, \Delta H], \mathbf{T}(B\Theta)]$$

waaruit wegens **C.S.** 1 (III; 7,21) volgt:

$(i_1 + i_2 .. + i_{n-1}, n . k_1) = [\mathbf{O}(BE, \Delta E) + .. + \mathbf{O}(BH, \Delta H), n . \mathbf{T}(B\Theta)]$ (1)

Nu is (Euclides II, 5)

$$\mathbf{O}(BE, \Delta E) = \mathbf{T}(B\Theta) - \mathbf{T}(\Theta E).$$

De opvolgende rechthoeken **O** kunnen dus worden voorgesteld (fig. 99) als gnomons, die ontstaan zijn, door van **T** $(B\Theta)$ achtereensvolgens af te nemen **T** $(\Theta E)$, **T** $(\Theta Z)$ .... **T** $(\Theta H)$. Noemen

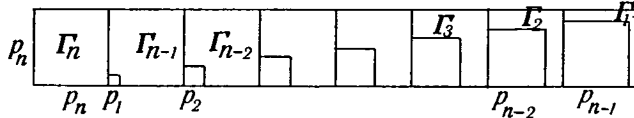



Fig. 99.

we de zijden dezer afgenomen vierkanten resp. $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, de correspondeerende gnomons zelf $\Gamma_{n-1}, \Gamma_{n-2} \ldots \Gamma_1$, waarbij **T** $(B\Theta)$ als $\Gamma_n$ en $B\Theta$ als $p_n$ kan worden betiteld, dan is de bewezen gelijkheid (1) te schrijven als

$$(I_n, \mathbf{K}) = [\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots \Gamma_{n-1}, n . \mathbf{T}(B\Theta)] \quad . \quad . \quad (2)$$

Nu is wegens III; 7,31

$$n . \mathbf{T}(p_n) < 3 [\mathbf{T}(p_1) + \ldots + \mathbf{T}(p_n)]$$

of

$$3n . \mathbf{T}(p_n) - 2n . \mathbf{T}(p_n) < 3[\mathbf{T}(p_1) + \ldots + \mathbf{T}(p_n)]$$

dus

$$3[\mathbf{T}(p_n) - \mathbf{T}(p_1) + \\ + \mathbf{T}(p_n) - \mathbf{T}(p_2) + \ldots + \mathbf{T}(p_n) - \mathbf{T}(p_{n-1})] < 2n . \mathbf{T}(p_n)$$

of

$$3[\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots \Gamma_{n-1}] < 2\,n . \mathbf{T}(B\Theta).$$

Hieruit volgt echter in verband met (2)

$3I_n < 2\mathbf{K}$ dus $I_n < \Psi$ in strijd met de onderstelling.

Geval II. Zij nu $BA\Gamma < \Psi$. Men kan nu een omgeschreven lichaam verkrijgen, zoodat

$$C_n < \Psi$$

waarna vergelijking van correspondeerende cylinderschijven van dit omgeschreven lichaam en van $K$ voert tot de betrekking

$$(c_1 + c_2 \ldots c_n, n . k_1) = [\mathbf{O}(B\Theta, \Delta\Theta) + \mathbf{O}(BE, \Delta E) + \\ + O(BH, \Delta H), n . \mathbf{T}(B\Theta)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De rechthoeken weer door gnomons voorstellende, krijgen we als boven uit

$$3n \,.\, \mathbf{T}(p_n) > 3[\mathbf{T}(p_1) + \ldots . + \mathbf{T}(p_{n-1})]$$

de conclusie

$$3[\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots . \Gamma_n] > 2n \,.\, \mathbf{T}(B\Theta)$$

waaruit in verband met (3) volgt

$3\ C_n > 2\ \mathbf{K}$ dus $C_n > \Psi$ in strijd met de onderstelling.

Algebraisch: Zij ten opzichte van het assenstelsel $B(Y\Delta)$ de vergelijking van de ellips in den twee-abscissenvorm

$$\frac{x^2}{y(2a-y)} = C$$

waarin $B\Delta = 2a$. Zij $\Theta\Gamma = b$ en laat $B\Delta$ in $n$ gelijke deelen verdeeld zijn. Dan geldt voor den inhoud van de $m^e$ ingeschreven cylinderschijf (van $B$ af gerekend)

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{x^2}{b^2} = \frac{y(2a-y)}{a^2}.$$

Archimedes vervormt nu $y\ (2a—y)$ meetkundig op een wijze, die algebraisch neerkomt op $y\ (2a—y) = a^2 - (a—y)^2$ en krijgt dus

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{a^2 - (a - \frac{m}{n}a)^2}{a^2}$$

Hieruit volgt

$$I_n = \mathbf{K}\,\frac{(n-1)a^2 - \left\{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \ldots . \left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^2\right\}}{na^2}.$$

Wegens $I = \lim\limits_{n \to \infty} I_n$ volgt hieruit nu

$$I = \mathbf{K}\left[1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots . (n-1)^2}{n^3}\right] = \tfrac{2}{3}\mathbf{K}$$

In het thans volgende paar proposities wordt de inhoud afgeleid van het kleinste der twee segmenten, waarin een vlak, dat niet door het centrum gaat, een sphaeroide verdeelt. De meest algemeene propositie is

Propositie 30.

*Indien een sphaeroide gesneden wordt met een vlak, dat niet loodrecht op de as staat en niet door het centrum gaat, zal het kleinste*

Fig. 100.

*van haar segmenten tot het kegelsegment, dat dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as, de reden hebben, die de som van de helft van de verbindingslijn van de toppen der ontstane segmenten en de as van het grootste segment tot de as van het grootste segment heeft.*

Laat het vlak van teekening de sphaeroide snijden volgens de oxytome $AB\Gamma Z$ met centrum $\Theta$ (fig. 100); zij verder $ZH = Z\Theta$. Laat $\Psi$ een kegel zijn, welks inhoud zich tot den inhoud van het kegelsegment $BA\Gamma$ verhoudt als de twee in de propositie genoemde lengten, dus als $H\Delta$ tot $Z\Delta$. Te bewijzen is dus, dat het segment $BA\Gamma$ gelijk is aan $\Psi$. Is nu **K** de cylinderschijf $A\Pi\Sigma\Gamma$ en is $BP = \frac{1}{3}$ $B\Delta$, dus $H\Delta = 3\Theta P$, dan is

$$(\mathbf{K}, \text{kegelsegment } BA\Gamma) = (H\Delta, \Theta P)$$
$$(\text{kegelsegment } BA\Gamma, \Psi) = (Z\Delta, H\Delta)$$

dus

$$(\mathbf{K}, \Psi) = (Z\Delta, \Theta P)$$

Is nu het conoidsegment niet gelijk aan $\Psi$, dan is het òf groter òf kleiner dan $\Psi$.

Geval I. Zij $BA\Gamma > \Psi$. Op de nu reeds herhaaldelijk toegelichte wijze construeert men nu een ingeschreven lichaam, zoodat

$$I_n > \Psi$$

waarna men door vergelijking van correspondeerende cylinderschijven van het ingeschreven lichaam en van $K$ op dezelfde wijze als in Prop. 28 komt tot de betrekking:

$$(i_1 + i_2 + \ldots. + i_{n-1},\ n\,.\,k_1) =$$
$$= [\mathbf{O}(BE,\ ZE) + \ldots. + \mathbf{O}(BM,\ ZM),\ n\,.\,\mathbf{O}(B\Delta,\ Z\Delta)]\ \ldots \quad (1)$$

De rechthoeken $\mathbf{O}$ kunnen nu niet meer als gnomons worden voorgesteld; de methode van Prop. 28 is nu echter als volgt uit te breiden (fig. 101):

$$\mathbf{O}(BE,\ ZE) = \mathbf{O}(B\Delta - \Delta E,\ Z\Delta + \Delta E) =$$
$$= \mathbf{O}(B\Delta,\ Z\Delta) - \mathbf{O}(\Delta E,\ \Delta E + Z\Delta - B\Delta$$

Fig. 101.

Zij nu $Z\Delta = N\Xi$ en $B\Delta = O\Xi$.

$\mathbf{O}\ (B\Delta, Z\Delta)$, verder aan te duiden als $\Gamma_n$, is hyperbolisch aan te passen aan het lijnstuk $NO = Z\Delta - B\Delta$ met quadratisch exces $\mathbf{T}(B\Delta)$. Is nu $p_1 = \Delta E$, dan vinden we $\mathbf{O}(BE,\ ZE)$ door van $\Gamma_n$ af te trekken $\mathbf{T}(p_1)$ en $\mathbf{O}(p_1,\ NO)$, waardoor het gearceerde oppervlak $\Gamma_{n-1}$ overblijft. Op dezelfde wijze vinden we de volgende rechthoeken terug als $\Gamma_{n-2} \ldots. \Gamma_1$, waarbij dus $p_2 = \Delta X, \ldots$ $p_{n-1} = \Delta M$. De weggenomen, niet gearceerde rechthoeken $X_2, X_3 \ldots$ $X_n$ voldoen nu, samen met $\Gamma_n$ als $X_1$, aan de voorwaarden van C.S. 2 (III; 7,4). Hieruit volgt

$$(n\,.\,X_1,\ X_1 + X_2 + \ldots.\ X_n) < (NO + p_n,\ \tfrac{1}{3}p_n + \tfrac{1}{2}NO)$$

waarin

$$NO = Z\Delta - B\Delta = 2\Theta\Delta,\ p_n = B\Delta,\ \tfrac{1}{3}p_n = BP.$$

Dus is

$$(n\,.\,X_1,\ X_1 + \ldots..\ X_n) < (Z\Delta,\ BP + \Theta\Delta)$$

dus *convertendo*

$$[n\,.\,X_1,\ \Gamma_1 + \ldots \Gamma_{n-1}] > (Z\Delta,\ \Theta P) = (\mathbf{K},\ \Psi)$$

dus in verband met (1) (*invertendo*)

$$(\mathbf{K},\ I_n) > (\mathbf{K},\ \Psi) \text{ dus } I_n < \Psi$$

in strijd met de onderstelling.

Geval II. Zij nu $BA\Gamma < \Psi$. Construeer nu een omgeschreven lichaam, zoodat

$$C_n < \Psi$$

Vergelijking van correspondeerende cylinderschijven geeft nu

$(c_1 + c_2 + \ldots . c_n,\ n\,.\,k_1) =$

$=[\mathbf{O}(B\Delta, Z\Delta)+\mathbf{O}(BE, ZE)+\ldots . + \mathbf{O}(BM, ZM),\ n\,.\,\mathbf{O}(B\Delta, Z\Delta)]$ (2)

We stellen nu de opvolgende rechthoeken, die in het tweede lid voorkomen, op dezelfde wijze als boven voor door de oppervlakken $\Gamma_n, \ldots . \Gamma_1$. Wegens **C.S.** 2 (III; 7,4) is nu

$$(n\,.\,X_1,\ X_2 + X_3 \ldots . X_n) > (Z\Delta,\ BP + \Theta\Delta)$$

dus *convertendo*

$$(n\,.\,X_1,\ \Gamma_1 + \ldots . \Gamma_n) < (Z\Delta,\ \Theta P) = (\mathbf{K},\ \Psi)$$

dus in verband met (2) (*invertendo*)

$$(\mathbf{K},\ C_n) < (\mathbf{K},\ \Psi) \text{ of } C_n > \Psi$$

in strijd met de onderstelling.

Algebraisch: Zij (met overigens dezelfde notaties als boven) $BZ = 2a$, $B\Delta = y_0$, $\Delta\Gamma = x_0$, dan is te bewijzen:

$$I = \tfrac{1}{3}\mathbf{K}\,\frac{3a - y_0}{2a - y_0}$$

Nu is

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{y(2a - y)}{y_0(2a - y_0)}$$

Archimedes schrijft nu $y(2a—y) = y_0\ (2a—y_0)$ —

$$(y_0—y)\ [(y_0—y) + 2(a—y_0)]$$

Noemen we nu $2(a—y_0) = t$

dan is

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{y_0(y_0 + t) - (y_0 - y)(y_0 - y + t)}{y_0(y_0 + t)}$$

dus wegens

$$y = \frac{m}{n}\,y_0$$

$$\frac{i_m}{\frac{1}{n}\mathbf{K}} = \frac{y_0(y_0+t) - \frac{n-m}{n}y_0\left[\frac{n-m}{n}y_0 + t\right]}{y_0(y_0+t)}$$

dus

$$I_n = \mathbf{K}\,\frac{(n-1)(y_0+t) - y_0\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] - t\,\frac{1+2+\ldots(n-1)}{n}}{n(y_0+t)}$$

dus

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \mathbf{K}\,\frac{y_0 + t - \frac{1}{3}y_0 - \frac{1}{2}t}{y_0+t}$$

$$= \tfrac{1}{3}\mathbf{K}\,\frac{2y_0 + \frac{3}{2}t}{y_0+t} = \tfrac{1}{3}\mathbf{K}\,\frac{3a - y_0}{2a - y_0}.$$

Ten slotte wordt ook de inhoud van het grootste der twee segmenten bepaald, waarin een vlak, dat niet door het centrum gaat, een sphaeroide verdeelt. De meest algemeene propositie is Prop. 32, die geheel gelijkluidend is met Prop. 30, mits men daarin de woorden „grootste" en „kleinste" verwisselt. Het bewijs verschilt echter aanmerkelijk van dat van Prop. 30. Dit steunde nl. op Prop. 20, waarin (met het oog op de stelling, vermeld in III; 6,551) aangenomen moest worden, dat het segment, dat door het beschouwde snijvlak van de sphaeroide wordt afgesneden, kleiner is dan de helft der sphaeroide. Dat is nu niet langer het geval en daarom kan de methode van Prop. 30 niet meer worden toegepast. Het zeer gecompliceerde bewijs verloopt als volgt (fig. 102):

Laat het als boven aangenomen vlak van teekening de sphaeroide snijden volgens de oxytome $AB\Gamma\Delta$, de basis van het segment volgens $AB$, het vlak door het centrum $\Theta$ parallel met de basis volgens $K\Lambda$. Zij verder $\Delta H = BZ = \frac{1}{2}B\Delta$. Te bewijzen is nu:

(sphaeroidsegment $BA\Gamma$, kegelsegment $BA\Gamma$) = $(HE, \Delta E)$.

Bewijs: Wegens **C.S.** 30 is

(sphaeroidsegment $\Delta A\Gamma$, kegelsegment $\Delta A\Gamma$ = $(ZE, BE)$

Verder is de reden

(kegelsegment $\Delta K\Lambda$, kegelsegment $\Delta A\Gamma$) samengesteld uit
$[\mathbf{T}(\Theta K), \mathbf{T}(EA)]$ en $(\Delta\Theta, \Delta E)$ dus uit
$[\mathbf{O}(\Delta\Theta, B\Theta), \mathbf{O}(\Delta E, BE)]$ en $(\Delta\Theta, \Delta E)$

Construeer nu een punt $\Sigma$, zoodat

$(\Delta E, \Delta\Theta) = (\Delta\Theta, \Delta\Sigma)$ dus

$(\Delta\Theta, \Delta E) = [\mathbf{O}(B\Theta, \Delta\Sigma), \mathbf{O}(B\Theta, \Delta\Theta)]$

Hieruit volgt

(kegelsegment $\Delta K\Lambda$, kegelsegment $\Delta A\Gamma$) $= [\mathbf{O}(B\Theta, \Delta\Sigma), \mathbf{O}(BE, \Delta E)]$

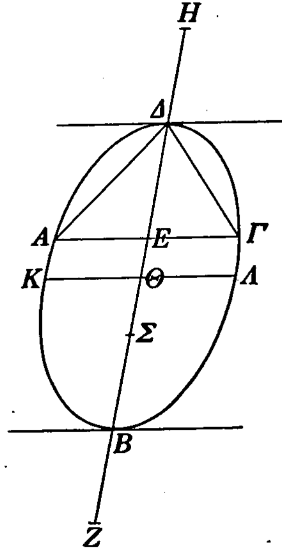



Fig. 102.

Ook is

(kegelsegment $\Delta A\Gamma$, sphaeroidsegment $\Delta A\Gamma$) $= (BE, ZE) =$
$[\mathbf{O}(BE, \Delta E), \mathbf{O}(ZE, \Delta E)]$ zoodat *ex aequali*

(kegelsegment $\Delta K\Lambda$, sphaeroidsegment $\Delta A\Gamma$) $=$
$= [\mathbf{O}(B\Theta, \Delta\Sigma), \mathbf{O}(ZE, \Delta E)]$

Wegens **C.S.** 28 is nu verder

(sphaeroide, kegelsegment $\Delta K\Lambda$) $= (4, 1) = (HZ, B\Theta) =$
$= [\mathbf{O}(HZ, \Delta\Sigma), \mathbf{O}(B\Theta, \Delta\Sigma)$

dus opnieuw *ex aequali*

(sphaeroide, sphaeroidsegment $\Delta A\Gamma$) $= [\mathbf{O}(HZ, \Delta\Sigma), \mathbf{O}(ZE, \Delta E)$.

dus

(sphaeroidsegment $BA\Gamma$, sphaeroidsegment $\Delta A\Gamma$) $=$
$[\mathbf{O}(HZ, \Delta\Sigma) - \mathbf{O}(ZE, \Delta E), \mathbf{O}(ZE, \Delta E)]$

Hierin is

$\mathbf{O}(HZ, \Delta\Sigma) - \mathbf{O}(ZE, \Delta E) = \mathbf{O}(HE, \Delta\Sigma) +$
$+ \mathbf{O}(ZE, \Delta\Sigma) - \mathbf{O}(ZE, \Delta E) = \mathbf{O}(HE, \Delta\Sigma) + \mathbf{O}(ZE, E\Sigma)$.

Dus is

(sphaeroidsegment $B A \Gamma$, sphaeroidsegment $\Delta A \Gamma$) =

$$= [\mathbf{O}(HE, \Delta\Sigma) + \mathbf{O}(ZE, E\Sigma), \mathbf{O}(ZE, \Delta E)]$$

(sphaeroidsegment $\Delta A \Gamma$, kegelsegment $\Delta A \Gamma$) =

$$= (ZE, BE) = [\mathbf{O}(ZE, \Delta E), \mathbf{O}(BE, \Delta E)]$$

(kegelsegment $\Delta A \Gamma$, kegelsegment $B A \Gamma$) = $(\Delta E, BE)$ =

$$= [\mathbf{O}(BE, \Delta E), \mathbf{T}(BE)]$$

dus *ex aequali*

(sphaeroidsegment $B A \Gamma$, kegelsegment $B A \Gamma$) =

$$[\mathbf{O}(HE, \Delta\Sigma) + \mathbf{O}(ZE, E\Sigma), \mathbf{T}(BE)].$$

Hierin is

$$\mathbf{T}(BE) = \mathbf{T}(B\Theta + \Theta E) = \mathbf{T}(B\Theta) + \mathbf{T}(\Theta E) + 2 . \mathbf{O}(B\Theta, \Theta E) =$$
$$= \mathbf{T}(B\Theta) + \mathbf{O}(\Theta E, ZE) = \mathbf{O}(\Delta E, \Delta\Sigma) + \mathbf{O}(\Theta E, ZE)$$

zoodat

(sphaeroidsegment $B A \Gamma$, kegelsegment $B A \Gamma$) =

$$= [\mathbf{O}(HE, \Delta\Sigma) + \mathbf{O}(ZE, E\Sigma), \mathbf{O}(\Delta E, \Delta\Sigma) + \mathbf{O}(\Theta E, ZE)]$$

De reden in het tweede lid is nu te herleiden met behulp van de betrekking, waardoor $\Sigma$ bepaald is

$$(\Delta E, \Delta\Theta) = (\Delta\Theta, \Delta\Sigma) \text{ Immers hieruit volgt}$$
$$(\Theta E, \Delta E) = (\Theta\Sigma, \Delta\Theta) \text{ dus}$$
$$(\Theta E, \Theta\Sigma) = (\Delta E, \Delta\Theta) \text{ of}$$
$$(\Sigma E, \Theta E) = (HE, \Delta E)$$

Dus is

$$[\mathbf{O}(HE, \Delta\Sigma), O(\Delta E, \Delta\Sigma)] = [\mathbf{O}(ZE, E\Sigma), \mathbf{O}(\Theta E, ZE)] = (HE, \Delta E).$$

Dus

(sphaeroidsegment $B A \Gamma$, kegelsegment $B A \Gamma$) = $(HE, \Delta E)$.

In dit bewijs komen verschillende eigenaardigheden der Grieksche wiskunde (de onoverzichtelijkheid als gevolg van de geringe ontwikkeling der symbolische notatie, de beperking tot termen, die ten hoogste den graad twee hebben, maar ook het groote vernuft in het langs meetkundigen weg uitvoeren van algebraische herleidingen) zoo duidelijk tot uiting, dat het de moeite loont, het iets nader te beschouwen.

Stellen we daartoe de inhouden van de sphaeroide zelf en van de beide sphaeroid-segmenten $\Delta A \Gamma$ en $B A \Gamma$ opv. voor door $I$, $I_1$ en $I_2$, die der kegelsegmenten $\Delta K \Lambda$, $\Delta A \Gamma$ en $B A \Gamma$ opv. door $K$, $K_1$,

$K_2$; zij verder $\Delta B = 2a$, $\Delta E = h_1$, $BE = h_2$, $\Theta K = b$, $EA = p$.

De gang van het bewijs is nu deze, dat men uit de verhoudingen

$$\frac{I_1}{K_1}, \frac{K_1}{K}, \frac{K}{I}$$

door vermenigvuldiging komt tot de verhouding $\frac{I_1}{I}$.

Daaruit vindt men dan $\frac{I_2}{I}$ en vervolgens met behulp van de kennis van

$$\frac{I}{K} \text{ en } \frac{K}{K_2}$$

weer door vermenigvuldiging $\frac{I_2}{K_2}$.

Algebraisch ingekleed, zou dit tegenwoordig als volgt kunnen verloopen:

$$\frac{I_1}{K_1} = \frac{a + h_2}{h_2} \qquad \text{C.S. 30}$$

$$\frac{K_1}{K} = \frac{p^2 h_1}{b^2 a} = \frac{h_1^2 h_2}{a^3}$$

$$\frac{K}{I} = \frac{1}{4} \qquad \text{C.S. 28}$$

Dus $$\frac{I_1}{I} = \frac{(a + h_2) h_1^2}{4a^3}$$

Dus $$\frac{I_2}{I} = \frac{4a^3 - (a + h_2) h_1^2}{4a^3}$$

$$\frac{I}{K} = 4.$$

$$\frac{K}{K_2} = \frac{b^2 a}{p^2 h_2} = \frac{a^3}{h_1 h_1^2}$$

Hieruit volgt $$\frac{I_2}{K_2} = \frac{4a^3 - (a + h_2) h_1^2}{h_1 h_2^2}$$

waaruit men na eenig rekenen met behulp van de betrekking

$$2a = h_1 + h_2$$

vindt

$$\frac{I_2}{K_2} = \frac{a + h_1}{h_1}.$$

De redeneering van Archimedes luidt, algebraisch vertaald,

eenigszins anders: hij voert een grootheid $t$ (bij hem $\Delta\Sigma$) in door de betrekking

$$a^2 = h_1 t$$

en vindt daardoor

$$\frac{K_1}{K} = \frac{h_1 h_2}{at} \text{ en } \frac{K}{K_2} = \frac{at}{h_2^2}.$$

Daardoor wordt

$$\frac{I_2}{K_2} = \frac{4at - h_1(a + h_2)}{h_2^2}$$

Het is nu vooral merkwaardig te zien, hoe hij deze uitdrukking herleidt. Hij schrijft daartoe voor den teller:

$$(a + h_1)t + (a + h_2)t - h_1(a + h_2) = (a + h_1)t + (a + h_2)(t - h_1)$$

voor den noemer:

$$[a + (a - h_1)]^2 = a^2 + (a - h_1)\ (a + h_2)$$

zoodat

$$\frac{I_2}{K_2} = \frac{(a + h_1)t + (a + h_2)(t - h_1)}{h_1 t + (a + h_2)(a - h_1)}.$$

Nu is

$$\frac{h_1}{a} = \frac{a}{t} = \frac{a - h_1}{t - a}$$

of

$$\frac{a - h_1}{h_1} = \frac{t - a}{a} = \frac{t - h_1}{a + h_1}$$

dus

$$\frac{(a + h_1)t}{h_1 t} = \frac{(t - h_1)(a + h_2)}{(a - h_1)(a + h_2)} = \frac{I_2}{K_2}$$

dus

$$\frac{I_2}{K_2} = \frac{a + h_1}{h_1}$$

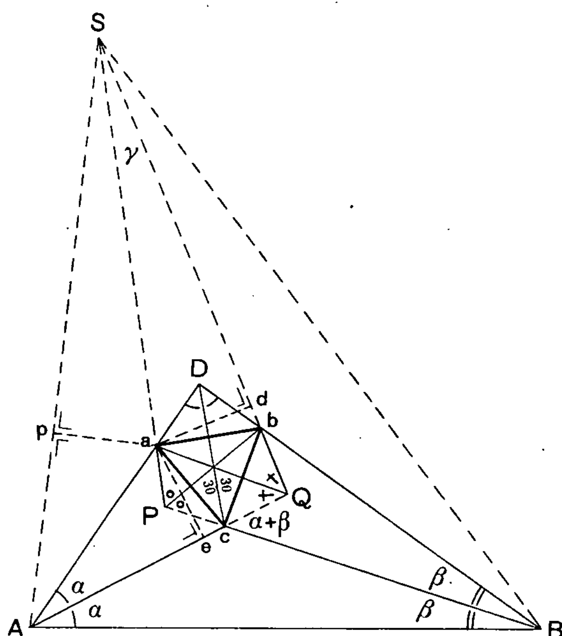
# HET VRAAGSTUK VAN MORLEY

DOOR

L. J. ROBORGH.

---

In het gedeelte ABD van den gegeven driehoek is de bisectrice Dc getrokken en op de aangegeven wijze is daarin de gelijkzijdige




driehoek abc geconstrueerd. Het punt P is het snijpunt van de verlengden van Bc en de middelloodlijn uit b op ac getrokken. Op gelijke wijze is het punt Q verkregen. De driehoeken acP en bcQ zijn dus gelijkbeenig.

$$\angle\ cDB = 90 - \alpha - \beta$$

$$\angle\ DcB = 180 - (90 - \alpha - \beta + \beta) = 90 + \alpha$$

$$- \qquad \underline{(30 + \alpha + \beta)}$$

$$\angle\ bcQ = 60 - \beta$$

$$\underline{\angle\ bQc} = \underline{60 + 2\beta}$$

Op dezelfde wijze zal men vinden $\angle$ aPc $= 60 + 2\alpha$.

Pa en Qb snijden elkander in een punt, aangeduid door de letter S. In vierhoek PcQS is $\angle$ S $= 360 - (P + c + Q) = 360 - 60 - 2\alpha - 180 + \alpha + \beta - 60 - 2\beta = 60 - \alpha - \beta$ o het *derde* deel van den tophoek van den gegeven driehoek; noemen wij dit $\gamma$.

$\angle$ QaS $= 180 - (30 + \beta + \gamma) = 90 + \alpha$ en
$\angle$ QaA $= 180 - (30 + \beta + \alpha) = 90 + \gamma$ dus
$\angle$ SaA $= 180 - \alpha - \gamma$.

Wanneer wij nu uit a de loodlijnen ad op SQ en ae op AQ neerlaten dan volgt uit congruentie dat ad = ae.

Worden de driehoeken adS om aS en aeA om aA gewenteld, zoo vallen da en ea op de lijn, welke $\angle$ SaA ($= 180 - \alpha - \gamma$) in deelen van $90 - \gamma$ en $90 - \alpha$ splitst en in het punt p van die lijn, zoodanig gelegen dat pa gelijk is aan ad (of ae), komen dan de punten d en e te liggen; tevens wordt $\angle$ SpA bij dat omwentelen 180°, $\angle$ pAa $= \alpha$ en $\angle$ pSa $= \gamma$. Op dezelfde wijze wordt geconstateerd dat door de lijn BS met Bb de hoek $\beta$ wordt gevormd en tusschen Sb en SB de hoek $\gamma$.

Hiermede is bewezen dat driehoek ABS en de gegeven driehoek congruent zijn en dat de hoekpunten van den gelijkzijdigen driehoek abc samenvallen met de overeenkomstige snijpunten in den gegeven driehoek, welke dus op hun beurt een gelijkzijdigen driehoek vormen.

October 1938.

---

# OVER „DE INHOUD VAN EEN VEELVLAK"

DOOR

A. M. KROON.

---

Op p. 16 e.v. van jaargang 15 van Euclides staat een artikel van den heer C. J. Alders over de inhoud van een veelvlak. Naar aanleiding daarvan laat ik een opmerking volgen over een behandeling van de leerstof voor middelbare scholen op een wijze, die voor onze leerlingen ongeschikt moet genoemd worden.

Er is nl. de laatste jaren een tendenz in de paedagogisch-didactische stromingen om nieuw verworven gezichtspunten omtrent de opbouw der wiskunde in het onderwijs tot hun recht te laten komen. M.i. terecht. Maar bij elke verandering moet men in het oog houden dat leerlingen van 12 tot 18 jaar moeten kunnen begrijpen, wat wij hun meedelen. En niet alleen leerlingen met uitgesproken aanleg voor wiskunde, maar ook zij met een gewoon, „gezond", verstand.

Dit spreekt misschien van zelf, maar daarom veroordeel ik een handelwijze als hier en daar wordt gevolgd in de door den heer A. genoemde werkjes: Stoelinga en Van Tol, Vlakke Meetkunde, en C. J. Alders, Vlakke Meetkunde, en in § 3 van bovengenoemd artikel. Het behoort o.m. tot onze taak den leerlingen begrippen bij te brengen, soms geheel nieuwe, soms begrippen, die zij al bezitten, en die wij dan moeten verhelderen of scherper begrenzen. Op p. 18 wordt echter de inhoud van een viervlak *gedefiniëerd* als „het derde deel van de oppervlakte van het grondvlak vermenigvuldigd met de lengte van de hoogte." Zulk een definitie nu acht ik niet de juiste weg om tot het begrip „inhoud" te komen, of om het reeds aanwezige begrip „inhoud" te verduidelijken. Een min of meer vaag begrip als „begrensde ruimte", „iets dat ruimte inneemt", „aantal $cm^3$", komt wel bij elke leerling voor. Ik vind nu het vergelijken met de inhoudseenheid, b.v. de kubieke centimeter, zoals dat volgens de gewoonlijk gebruikte manier gebeurt, een methode bij uitstek geschikt om dat vage inhoudsbegrip te

preciseren. M.a.w. een methode, die meer bij de aanschouwing aansluit; al wil ik niet ontkennen dat er stellingen bij te pas komen, waarvan de op school gegeven bewijzen niet in alle opzichten een strenge critiek kunnen verdragen. Wij moeten met strengheid en exactheid op de school vaker wat door de vingers zien. De heer A. zegt zelfs in het voorwoord van zijn Vlakke Meetkunde: „Uit den aard der zaak moet men in een schoolboek de eisen aan de exactheid matigen; veel van hetgeen, dat bewezen kàn worden, is voor jeugdige leerlingen te moeilijk; men doet dan m.i. maar beter om dat feit zonder meer te aanvaarden en een zo goed mogelijk compromis te sluiten." Zulk een compromis nu sluit ik hier gaarne, liever dan de leerlingen een stelling, die met een compromis-methode goed te bewijzen is, als definitie voor te zetten. Deze definitie komt voor de kinderen te veel „uit de lucht vallen" om een rustige aanvaarding te verzekeren, en ik kan hem onmogelijk rangschikken bij de zo-eenvoudig-mogelijke, zoals op p. 22 gezegd wordt. De verdere motivering: „In de hogere wiskunde definiëren we een inhoud door een integraal, een sinus door een reeks, . . . " houdt m.i. geen steek, omdat die hogere wiskunde niet voor onze leerlingen bestemd is.

Dat bij mij dezelfde bezwaren zullen bestaan tegen de definitie van de oppervlakte van een driehoek als het halve product van basis en hoogte, ligt voor de hand. Ze bestaan bovendien tegen de behandeling van de congruentie van driehoeken, zoals die in het boek van den heer A. op p. 24 e.v. voorkomen, en b.v. in het Leerboek der vlakke Meetkunde met vraagstukken, van Ouwehand en Ruben, deel I, p. 22 e.v. (2e druk), en in de Beginselen der Vlakke Meetkunde van J. H. Schogt op p. 17 e.v. Het aanbrengen van het begrip „congruentie" is van te groot belang om er niet veel zorg aan te besteden; het ietwat handtastelijke „opnemen" en „neerleggen" en „bedekken" van driehoeken, dat bij de „oude" manier op de voorgrond staat, is voor de jonge leerlingen van de eerste klasse toch zeer veel passender dan het poneren van een axioma: twee driehoeken zijn congruent, als zij twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben. Wij moeten niet alleen, en ook niet altijd in de eerste plaats, vragen wat wetenschappelijk juister is, maar wel wat voor het kind begrijpelijker is.

Hoe meer wij bij ons werk, — de wiskunde toegankelijk maken voor 12- tot 18-jarigen —, een afwijking van de wetenschappelijke

weg kunnen vermijden, hoe beter. Maar mag het wetenschappelijk onjuist genoemd worden, als wij de aanschouwing aan onze theorie ten grondslag leggen? (Ik mag hierbij in het midden laten, wat we onder „wetenschappelijk" hebben te verstaan). Prof. B. L. v. d. Waerden heeft in „Christiaan Huijgens", jg. 13, p. 65 e.v., en jg. 14, een artikel geschreven over de logische grondslagen der Euklidische Meetkunde, waarin een theorie over de congruentie wordt gegeven, gefundeerd door het begrip „verplaatsing" en een aantal axioma's daarover. Daarin wordt natuurlijk over „opnemen en neerleggen" niet gerept, maar bij een behandeling op school zou men het als een deel van onze taak kunnen beschouwen, die congruentie-axioma's te vertalen in voor de kinderen verstaanbare taal. Tegenover de methode, die de heer A. aan Hilbert ontleent, kan men er dus een stellen aan v. d. Waerden ontleend. Als het er op aankwam een „autoriteit" te kunnen aanvoeren om ons werk te rechtvaardigen, is de „oude" manier dus gelijk in rang met de nieuwe. Maar dáárop komt het niet aan: de hoofdzaak is een duidelijke en voor het kind begrijpelijke behandeling van de stof. Kan die geaxiomatiseerd worden, dan is dat uitstekend (en een niet tot strijdigheden aanleiding gevende theorie moet dat toelaten), maar met die axiomatisering vallen wij de leerlingen niet lastig. En in dat geval is het bovendien mogelijk, dat we eigenlijk impliciet deze axioma's er bij geven, maar niet nadrukkelijk op hen wijzen of hun onderlinge onafhankelijkheid of verdraaglijkheid aantonen. Zij zijn trouwens in de behandeling van v. d. Waerden onmiddellijk door de aanschouwing ingegeven en daardoor al bijzonder tot grondslag voor een meer elementaire behandeling aangewezen. Maar een begrip als „verplaatsing" moet nadrukkelijk door aanschouwing bij de leerlingen worden verhelderd en niet een bestaan in het kinderlijk denken veroveren *door middel van* die axioma's.

Bedenken wij ook het volgende. De mensen hebben in vele eeuwen een meetkunde gemaakt, die ontstaan is uit een (bestaande of verbeelde) realiteit; en niet door abstrahering, maar door idealisering. Niet door abstrahering van het bijzondere en behoud van het gemeenschappelijke zijn de geometrische begrippen gevormd. Hun ontstaan is geheel anders geweest. En de geometer, die dit alles weet, is thans in staat een geheel andere methode van begripsvorming en dus van wiskunde-opbouw te geven, *nadat* hij in

zijn jeugd de wording der begrippen op de eerste manier had ondergaan. Besparen wij onze leerlingen dan de moeilijkheden, die onvermijdelijk aan het overslaan dier oude methode verbonden zijn! D.w.z. laten wij geen axiomatiek in de lagere klassen van de school invoeren, tenzij stilzwijgend; en laten wij bij de begripsvorming zo weinig mogelijk formalistisch handelen. Was er mogelijkheid tot ruimere behandeling, dan zou ik in de hoogste klassen een axiomatische vastlegging van het vroeger geleerde graag willen geven. Helaas ontbreekt de tijd er voor. Het moderne axiomabegrip machtig worden immers betekent voor een jong mens een zeer grote stap vooruit in zijn denkwereld. Het zal echter voor een groot deel der schoolbevolking niet bereikbaar zijn. Het inhoudsbegrip invoeren op de hier aangevochten wijze zou ik dus alleen kunnen doen als curiositeit voor de leerlingen en nà de gebruikelijke behandeling.

---

## KORRELS.

### XXX. NET ANDERSOM.

„Positief naar boven, negatief naar beneden". Dat zien de jongens zo vaak en niets anders (behalve dan rechts en links op de horizontale as), dat ze allicht tot de omkering komen: „Naar boven positief, naar beneden negatief".

Een voorbeeld, waarbij het omgekeerd is. In een kaaimuur is een gat; in dat gat gaat het water met het tij op en neer; op het water rust een drijver en op die drijver staat een maatlat, die boven de kade uitsteekt. Op de maatlat ziet men nu van N.A.P. af naar boven —1, —2, —3, enz. en naar beneden +1, +2, +3, enz.

P. W.

### XXXI. BISSECTRICE OF DEELLIJN?

De schrijvers van Nederlandsche leerboeken over meetkunde geven in het algemeen de voorkeur aan het woord „bissectrice" of „bissectrix" van een hoek boven „deellijn". Deze voorkeur berust, als ik goed zie, niet zoozeer op een neiging, om altijd vreemde woorden boven Hollandsche te verkiezen, als wel op de meening, dat het vreemde woord in dit speciale geval het aan te duiden begrip nauwkeuriger omschrijft dan het eigene. Men voelt blijkbaar in het woord „bis-sectrix" een uitdrukking van de gelijkheid der twee door de deeling verkregen deelen en men mist die uitdrukking in het meer onbepaalde „deellijn".

Het komt mij voor, dat dit gevoel ongegrond is. *Bis* beduidt tweemaal en *bi-secare* zou dus eigenlijk „tweemaal snijden" moeten beduiden. Nu heeft het woord in het wiskundige Latijn weliswaar van oudsher de beteekenis gehad van „in twee gelijke deelen verdeelen", maar het is duidelijk, dat die beteekenis er slechts bij afspraak aan gehecht is en dat ze uit de samenstelling van het woord niet kan worden afgelezen. Op dezelfde wijze kan men echter afspreken, dat een „deellijn" van een hoek dien hoek in twee gelijke deelen verdeelt. Hiermee vervalt dus het eenige argument, dat men voor „bissectrix" kan aanvoeren.

Ik wil hier nog bij opmerken, dat „bisecare" niet eens een heel gangbare term in het mathematisch Latijn is. Huijgens zegt b.v. bijna altijd „bifariam secare" en ik betwijfel sterk, of het woord „linea bissectrix" wel ergens bij hem voorkomt. Het ziet er ook wel naar uit, dat de Nederlandsche vaklitteratuur het woord veeleer uit het Fransch dan uit het Latijn heeft overgenomen. Daarop wijst b.v. de alom toegepaste schrijfwijze met de dubbele s (van „ligne bissectrice") en de overheerschende gewoonte, om van „bissectrice" en niet van „bissectrix" te spreken. In het klassieke Latijn wordt echter een analoog gebouwd woord als „bisulcus" (uit bis en sulcus) met één s geschreven en in het Italiaansch heeft men eveneens „bisettrice".

Hoe men overigens ook over de keuze tusschen deellijn en bissectrice moge denken, het is volkomen onverdedigbaar, om, zooals vele schrijvers van leerboeken over Stereometrie en Beschrijvende Meetkunde zich veroorloven, van „bissectrice-vlak" te spreken en dus een essentieel vrouwelijken uitgang met het neutrum „vlak" (of „planum") te verbinden. De Franschen zeggen „plan bissecteur" en wie hen wil navolgen, moet dus „bissectorvlak" of „bissecteurvlak" zeggen. Maar is hier „deelvlak" ook niet eenvoudiger en natuurlijker?

Alles samengenomen zou het ongetwijfeld het beste zijn, als alle afleidingen van „bi-secare" met enkele of dubbele *s* maar uit de wiskundige vaklitteratuur werden geschrapt. Men behoeft geen purist te zijn, om woorden uit de eigen taal, die goed voldoen en waaraan niet het bezwaar van ongewenschte gedachtenverbindingen kleeft (zooals dit met termen als versnelling en arbeid in de mechanica het geval is) boven vreemde, die niet beter zijn, te verkiezen. E. J. D.

## XXXII. EENE MINDER GESCHIKTE DEFINITIE.

Mijns inziens is het niet geschikt, de eenparige beweging te definieeren als beweging, waarbij in gelijke tijdvakken gelijke wegen worden afgelegd. Om van deze definitie te komen tot de eigenschap, dat bij eene eenparige beweging de in twee tijdvakken afgelegde wegen zich verhouden als die tijdvakken, is toch eene tamelijk ingewikkelde redeneering noodig, namelijk dezelfde, die gebruikt wordt bij het bekende bewijs der planimetrische stelling,

dat de stukken, die drie evenwijdige lijnen van twee snijlijnen afsnijden, eene evenredigheid vormen.

Men kan deze redeneering overbodig maken, door de evenredigheid van weg en tijd of den lineairen vorm der bewegingsvergelijking als definitie te gebruiken. J. H. S.

## XXXIII. ABSOLUTE WAARDEN.

Het zou m. i. aanbeveling verdienen, als in ons schoolonderwijs wat meer aandacht gewijd werd aan de absolute waarden (van reëele getallen). Ten eerste is dit onderwerp noodig voor de theorie der limieten, ten tweede maakt het gebruik van absolute waarden het mogelijk, verschillende voorwaarden eenvoudiger te formuleeren. B. v.

$\sqrt{a^2 - 2a + 1} = |a - 1|$ i.p.v. $a - 1$ voor $a \geqq 1$, $1 - a$ voor $a \leqq 1$.

$\log |pq| = \log |p| + \log |q|$, mits $p \neq 0$, $q \neq 0$; i. p. v.

$\log pq = \log p + \log q$ als $p > 0$, $q > 0$ en

$\log pq = \log (-p) + \log (-q)$ als $p < 0$, $q < 0$.

Heeft men $x$ te berekenen uit

$$x^2 = 3{,}712 \times 4{,}215$$

dan heeft de schrijfwijze

$$2 \log |x| = \ldots.$$

het voordeel, dat de leerling niet zoo spoedig den negatieven wortel vergeet. J. H. S.

## XXXIV. HET LEERPLAN VOOR DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

Het schijnt, dat de woorden „kegel, cilinder en bol in eenvoudige ligging" in het nieuwe leerplan verschillende leraren in de mening gebracht hebben, dat thans de bol, zijn doorsneden enz. in de beschrijvende meetkunde een systematische behandeling moeten ondergaan. Deze mening is zeker onjuist. De bedoelde woorden kwamen al juist zo voor in het oorspronkelijke concept-leerplan (Eucl., Jaargang II, blz. 132). We schreven „in eenvoudige ligging" in de onderstelling, dat men zou begrijpen, dat geen uitbreiding van de leerstof in onze bedoeling lag; een belangrijke uitbreiding zou het zeker geweest zijn, als we b.v. de ellipsvormige

## BIJ DE ZEVENTIENDE DRUK.

Het leerplan 1937 voor het vak Rekenen voor de eerste klas luidt als volgt:

*De natuurlijke getallen. Hoofdbewerkingen. Uitbreiding van het getalbegrip: (het getal nul, de negatieve getallen). De gebroken getallen. Ontbinding in factoren; grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud. — Verhoudingen. Evenredigheden. Practische oefeningen in het rekenen. Hoofdrekenen.*

Dit programma was op een kleinigheid na reeds de inhoud van alle vorige drukken; alleen wat tussen haakjes staat, vond men er niet en vindt men nog niet in deze zeventiende druk. Over het getal nul is immers al heel weinig te zeggen en de negatieve getallen worden in de algebraboeken behandeld.

Toegevoegd zijn de bladzijden 71—84 met vraagstukjes voor hoofdrekenen; geschrapt zijn de voorbeelden I—IV aan het begin van § 27 en enige vraagstukjes van § 29.

Op 23 Oct. 1937 is er een vergadering gehouden van leraren in Wiskunde, waarin allerlei vragen werden gesteld; (zie het artikel van Dr. Wansink in „Euclides" Jg XIV blz. 72—85). Vraag 8 luidde: „Verwacht men, dat de Rekenkunde in de eerste klas behandeld wordt, zoals dat geschiedt in de „Beknopte Rekenkunde" van Wijdenes of is het peil van het „Rekenboek" van denzelfden schrijver voldoende?" Het antwoord van den Heer Van Andel luidde in het kort aldus: „Het rekenonderwijs in klasse I zij voor een groot deel taalonderwijs. Welk een nuttige oefening is het niet de leerlingen een behoorlijke opsomming te laten geven van de eigenschappen, die ze gebruiken, wanneer ze een vermenigvuldiging als 27 × 237 uitvoeren. Men behoeft over talstelsels en repeterende breuken niet te spreken." (Deze onderwerpen stonden reeds in alle drukken als „aantekening"; ik heb ze laten staan; ieder kan er mee doen, wat hij wil; de repeterende breuken te behouden als eerste kennismaking met oneindige processen, de tweede is de worteltrekking, lijkt me nog zo kwaad niet).

Al is het antwoord van den inspecteur nu niet precies antwoord op de vraag, zo lees ik er toch in, de mening van den Heer Van Andel vrij goed kennende, dat ook de bescheiden theorie van dit „Rekenboek" voldoet aan geest en bedoeling van het leerplan. Dat er leerstof voor het Rekenen in het leerplan is aangegeven,

zal ook inhouden, dat men er op alle scholen ook werkelijk wat aan zal doen; er zijn nog heel wat H.B.S., die geen leerboek op hun boekenlijst hebben staan of het slechts afdoen met een sommenboekje. Er zijn nog meer Gymnasia en Lycea, die het Rekenen links laten liggen of enkel volstaan met wat over evenredigheden. Dat de rekenkunde in het leerplan is opgenomen betekent voor hen, die er niets aan deden: „voortaan zult ge er voldoende zorg aan besteden". De bedoeling van hetgeen het leerplan eist, zou ik kort en bondig aldus willen uitdrukken: „alle wiskunde steunt op de rekenkunde; zorg dus voor een goede grondslag; deze bestaat in . . ."; zie boven, lezer.

Nu wil ik wel gaarne antwoord geven op vraag 8, die in de vergadering gesteld is; ik heb beide boeken welbewust geschreven op verschillende wijze; het „Rekenboek" bij de vele herdrukken, ook bij deze, niet verzwaard, de „Beknopte Rekenkunde" wel hier en daar vereenvoudigd. Het karakter van beide schoolboeken is niet gewijzigd; het eerste is een eenvoudige rekenkunde als inleiding tot de algebra; geen sluitend geheel; aan de intuitie wordt wel een en ander overgelaten. Het tweede is een zuivere theorie der rekenkunde, maar voor de leerlingen vrij zwaar. Alleen de leraar, die zelf veel voelt voor strengheid, zal succes hebben bij het gebruik van de „Beknopte Rekenkunde". Ik meen, dat het het overgrote merendeel liever het „Rekenboek" houdt, omdat ze van mening zijn, evenals ik, dat ook dit voldoende ondergrond geeft voor de algebra en de meetkunde.

Mijn antwoord op vraag 8 luidt dus: het peil van het Rekenboek is inderdaad voldoende; wie een volmaakt stevige grondslag meent te moeten en te kunnen leggen, laat die de Beknopte Rekenkunde nemen. Deze staat bij het Rekenboek echter achter in de behandeling van de onnauwkeurige getallen en het werken er mee.

Het verschil laat ik nog eens in deze bewoordingen uitkomen:

Het Rekenboek geeft in eenvoudige vorm het practisch bereikbare; dat de 17e druk van deel I verschijnt, de 11e van deel II (deze sterk bekort!) zegt voldoende, dat de meeste collega's mijn mening delen; het leerplan 1937 kan niet bedoelen, dat het voortaan anders *moet*. Wel, dat het anders *kan*, nl. in de trant van de Beknopte Rekenkunde; een theorie, gaaf van vorm en inhoud, die slechts door een ervaren docent met veel gevoel voor exactheid, goed kan worden onderwezen.

P. W.

## INHOUD VAN DE 17e DRUK VAN HET EERSTE STUKJE.

Inleiding — Optelling — Aftrekking — Vermenigvuldiging — Gedurige producten — Machten, G.G.D. en K.G.V. — Quotienten. — Deling — Kenmerken van deelbaarheid — G.G.D. door deling. — Verhoudingen — Evenredigheden.

Rekenen uit het hoofd.

Vraagstukken.

Cijferoefeningen.

Aantekeningen.

---

## INHOUD VAN DE 11e DRUK VAN HET TWEEDE STUKJE.

Vierkantsworteltrekking — Benaderde waarden — Optelling en Aftrekking — Vermenigvuldiging — Deling — Worteltrekking — Rekenkundige reeksen — Afhankelijkheid van grootheden.

Vraagstukken.

---

projectie van een doorsnede van de bol hadden willen laten voorschrijven.

In mijn bespreking van het nieuwe leerplan (Eucl., Jaargang XIII, blz. 278) heb ik nog eens de mening uitgesproken, dat het laatste inderdaad *niet* in de bedoeling ligt. Volgens het verslag van Collega Wansink (Jaargang XIV, blz. 82 onderaan) zegt de Inspecteur van Andel: „Door de toevoeging van bol, kegel en cylinder is aan de leerstof voor de beschrijvende meetkunde niets veranderd."

Duidelijker kan het m.i. niet! De Inspecteur wil ook in de beschrijvende meetkunde over een bol, een cylinder en een kegel mogen spreken. Als men vraagt de snijpunten van een rechte met bolvlak, een kegelvlak, een cylindervlak, die op voldoende wijze gegeven zijn, een raakvlak door een punt aan een cylinder- of kegelvlak, door een rechte aan een bolvlak, dan vraagt men niets, dat ook niet voorheen gevraagd kon worden en inderdaad gevraagd is. Ik kan niet inzien, dat de bedoelde wijze van vragen het voor den leerling moeilijker maakt.

Dit is volkomen logisch voor wie de les in beschrijvende meetkunde beschouwt als de gelegenheid, waar men de figuren bespreekt en tekent, die behoren bij de stereometrieles. Een enkele collega is het hierover echter niet eens: een Friese achtte (Wkbl. G. en M.O. 24 Nov. '38, blz. 373) de beschrijvende meetkunde „een vak, waarvan de behandeling in wezen verschilt van die der stereometrie." Ik kan dit niet begrijpen. H. J. E. Beth.

---

# BOEKBESPREKINGEN.

G. E. Kiers en Drs. M. Dijkshoorn, *Leerboek der Beschrijvende Meetkunde voor Lyceum, H.B.S. en M.T.S.*, 288 blz., 187 fig., ruim 650 vraagstukken, prijs *f* 2,90 (ingenaaid), met bijbehorend werkschrift, prijs *f* 0,25. G. B. van Goor Zonen, Den Haag, 1939.

Dit leerboek behoort zonder twijfel tot de beste leerboeken der Beschrijvende Meetkunde, die er in onze taal bestaan. Het munt uit door een heldere betoogtrant, duidelijke tekeningen, een uitgebreide, geleidelijk in moeilijkheden opklimmende verzameling vraagstukken, alle met zorg geredigeerd. In vele vraagstukken worden de gegeven punten door hun coördinaten in een XYZ-stelsel bepaald, de plaats van het snijpunt der assen in de constructiefiguur wordt overal, waar dit gewenst is, aangegeven; een werkschrift met een kwadratering van 8 bij 8 mm is toegevoegd voor het maken van de grotere constructies en van de eindexamenopgaven: van de kant der auteurs is aldus al het mogelijke gedaan om behoorlijk werk der leerlingen te bevorderen.

Bij de behandeling der theorie is gestreefd naar volledigheid: alle bizondere gevallen, die bij een probleem geacht worden van belang te zijn, worden in hun geheel behandeld. Van alle begrippen, die in de Beschr. Meetkunde een rol spelen, wordt een scherpe definitie gegeven, alle stellingen der stereometrie, die toegepast worden, worden opgesomd. Steeds weer valt de scherpe fomulering van definities en eigenschappen op. Komt in een stelling de uitdrukking „in het algemeen" voor, dan wordt nimmer verzuimd alle uitzonderingsgevallen op de algemene regel op te noemen.

Het boek bevat naast de theorie en de vraagstukkenverzameling nog een uitgebreide collectie uitgewerkte voorbeelden, waaronder naast de eindexamenopgaven van de H.B.S. hier te lande opgaven uit de fraaie Indische verzameling opvallen.

Er is een hoofdstuk over Stereometrisch Tekenen opgenomen, waarin de scheve parallelprojectie wordt behandeld en een hoofdstuk over schaduwbepaling. Een historische paragraaf is gewijd aan de belangwekkende figuur van Gaspard Monge.

De afwerking en verzorging van het boek laten niets te wensen over, behalve misschien dit éne, dat een boek van deze omvang ook gebonden in de handel zou moeten worden gebracht.

Het boek is verschenen in de „spelling 1938": de buigings-n is in ere hersteld, het woordbeeld 1934 is gebleven. Drukfouten vallen nagenoeg niet op (behalve in de onderschriften der figuren 106 en 137*a*).

Uit het voorbericht blijkt, dat het niet de bedoeling der schrijvers is, dat dit werk geheel moet worden doorgewerkt. Dit zou ook niet wel doenlijk zijn: in de ongeveer 50 lesuren, die er voor het vak Beschrijvende Meetkunde kunnen worden uitgetrokken, kan men geen 200 blz. tekst behandelen en 650 vraagstukken aan de orde stellen. De schrijvers wensen den gebruikers in alle opzichten keuze te laten. Men kan èn van de bizondere gevallen èn van de uitgewerkte voorbeelden èn van de vraagstukken zo veel laten vallen als men maar begeert, zonder het logisch verband van het geheel te schaden. Docenten, die leerboeken prefereren, die ze van *a* tot *z* met hun klas kunnen doorwerken, zodat de inhoud zo enigszins mogelijk geheel het geestelijk eigendom der leerlingen wordt, zullen een boek als dit natuurlijk niet wensen. Is echter de grote omvang (met de hogere prijs) géén bezwaar, wenst men al wat men in de les ooit zou willen behandelen, in het schoolboek te vinden, houdt men er meer van in een boek te schrappen, dan aan een in gebruik zijnd boek iets toe te voegen, dan verzuime men niet te trachten met dit uitstekende leerboek kennis te maken. Die kennismaking zal dan heel licht tot invoering bij het onderwijs kunnen leiden. Wansink.

Unterrichtswerk des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer[1]). Orell-Füssli Verlag, Zürich-Leipzig. Dr. W. Benz, *Leitfaden der Stereometrie*. 1938. 216 bladzijden. Prijs fr. 3.80.

Het degelijke stereometrieboek van Dr. Benz is voor Nederlandsche lezers niet zoo belangwekkend als sommige andere deelen van het Unterrichtswerk, omdat de behandeling niet belangrijk van de Nederlandsche afwijkt. Er is eenig verschil in de volgorde: de evenwijdigheid wordt niet *zoo* sterk op den voorgrond gebracht, maar wordt voorafgegaan door den loodrechten stand; veelvlakken, oppervlakten en inhouden vindt men aan het einde van het boek. Het boek bevat iets over projectieve meetkunde en over de kegelsneden, en voorts eene beknopte behandeling van de beschrijvende meetkunde (orthogonale projectie), waarin sterk de nadruk valt op de affiniteiten, maar die overigens niet veel van den te onzent gebruikelijken leergang afwijkt. Het boek is voorzien van nette, duidelijke figuren; eene vraagstukkenverzameling zal later verschijnen. J. H. S.

Dr. O. Bottema, *De elementaire meetkunde van het platte vlak*. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1938. 322 bladzijden, prijs *f* 6.50.

Dit boek bevat de afleiding van de stellingen, die tot de schoolplanimetrie behooren en van eenige andere, die men eveneens tot de elementaire vlakke meetkunde kan rekenen. Eene wetenschapplijke afleiding dezer stellingen *eischt* groote afwijkingen van de volgorde, waarin zij in de schoolboeken voorkomen, maar aan dezen eisch kan op vele manieren worden voldaan. Men kan, in aansluiting aan Euclides, eerst

[1]) Vroeger verschenen deeltjes van dit Unterrichtswerk zijn besproken in Euclides XIII, 166 en XIV, 42.

die stellingen behandelen, welke gemeenschappelijk zijn aan de euclidische en de hyperbolische meetkunde, en daarna het parallelenaxioma invoeren. De schrijver heeft een anderen weg gekozen: hij behandelt eerst die eigenschappen der figuren, welke invariant zijn t.o.v. de affiene transformaties, daarna die, welke slechts invariant zijn t.o.v. de euclidische bewegingsgroep. Het is verrassend op te merken, welk een groot gedeelte der elementaire vlakke meetkunde behoort tot de eerste afdeeling, dus tot de affiene meetkunde. Doordat reeds zeer vroeg het parallelenaxioma is ingevoerd, is eene vergelijking van euclidische en hyperbolische meetkunde bij deze behandelingswijze onmogelijk.

Het werk is zeer uitvoerig en duidelijk geschreven, en daardoor betrekkelijk gemakkelijk leesbaar. Op vele plaatsen zijn vraagstukken tusschen den tekst gevoegd; van sommige daarvan is de oplossing noodig voor het volgen van het verdere betoog.

De schrijver gebruikt eene terminologie, die zoowel afwijkt van de ouderwetsche, als van de terminologie die in moderne schoolboeken voorkomt, maar dit zal wel niet tot verwarringen leiden.

De recensent is vervuld van eerbied voor dit grondig doordachte stuk werk. J. H. S.

Prof. Dr. Fred. Schuh, *Leerboek der nieuwere meetkunde van het vlak en van de ruimte*. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1938. XVI + 506 bladzijden, 222 figuren, 1965 vraagstukken. Prijs *f* 10,50.

De nieuwere meetkunde is een phase in de ontwikkeling van de projectieve meetkunde, welke omstreeks het begin van de tweede helft van de negentiende eeuw een voorlopige afsluiting vindt. Kenmerkend is enerzijds een reactie op de overwegend analytische methoden, die sinds Descartes het meetkundig onderzoek beheersten — de meetkunde wil weer synthetisch zijn —, anderzijds de uitgesproken tendens naar algemeenheid, juist onder invloed van de analytische meetkunde. Dit laatste in opvallende tegenstelling tot de elementaire meetkunde, zoals die sinds Euclides is overgeleverd en beoefend. In deze domineren de nauwe begrensdheid van de begripsvorming en de vele gevalonderscheidingen zonder een samenvattend beginsel; in gene wordt het streven merkbaar om de meetkundige waarheden te formuleren als algemene principes. Nieuwe gebieden worden toegankelijk door het „continuïteitsprincipe" van Poncelet, waarmede de mogelijkheid wordt verkregen het „oneindig verre" en het „imaginaire" te betrekken in het meetkundig onderzoek.

Nieuwere meetkunde is nog niet projectieve meetkunde. Zij is gefundeerd op de Euclidische en ontleent daaraan haar geldigheid. De projectieve meetkunde evenwel is autonoom; zij bezit een eigen axiomastelsel, dat de geldigheid van haar resultaten waarborgt, onafhankelijk van de Euclidische meetkunde.

Voor een juiste waardering en een volledig begrip van de opbouw van de projectieve meetkunde is de kennis van de nieuwere meetkunde uitermate wenselijk. Het boven aangekondigde boek van Prof. Schuh

kan als een gids beschouwd worden voor hen, die willen doordringen in de zo bizonder interessante begrippenwereld van de nieuwere meetkunde. En het kan hier direct wel worden gezegd, een betrouwbare gids; een opmerking trouwens, die door een ieder, die wel eens kennis heeft genomen van de vele andere door Prof. Schuh gepubliceerde werken, als van zelf sprekend zal worden aanvaard.

In 53 korte hoofdstukken, verdeeld over een 14-tal afdelingen, komen tal van onderwerpen ter sprake, die tot de algemene mathematische ontwikkeling van iederen wiskunde-docent moeten behoren.

Afdeling A begint met de invoering van oneindig verre elementen, zowel in de planimetrie als in de stereometrie.. Het nut daarvan wordt gedemonstreerd aan de beroemde stelling van Desargues omtrent homologe driehoeken. Hiermede is een eerste stelling verkregen met een invariant karakter ten opzichte van centrale projectie. Tevens blijkt, dat in de aldus aangevulde meetkunde het dualiteitsprincipe geldig is, waarmede een uiterst vruchtbaar beginsel voor de uitbreiding van de meetkundige kennis is verkregen. Als voorbeeld van de toepassing van de centrale projectie voor het bewijzen van stellingen wordt het theorema van Pascal voor een lijnenpaar behandeld.

In afdeling B wordt na een inleiding over de plaatsbepaling van een punt op de rechte de leer van de dubbelverhoudingen en de harmonische ligging ontwikkeld. In aansluiting hiermede worden de bekende eigenschappen van de volledige vierhoek en de volledige vierzijde voor de dag gebracht.

In afdeling C wordt een poging gewaagd om een in de meetkunde zeer verbreide terminologie een welomschreven betekenis te geven; het is de terminologie betreffende soorten van oneindigheid van figuden en veelvoudigheid van gegevens.

Na de voorbereiding door afdeling D, waarin de stellingen van Menelaos en de Ceva in affine en projectieve gedaante worden afgeleid, zowel voor planimetrische als voor stereometrische figuren, wordt in afdeling E met behulp van dubbelverhoudingen de invoering van projectieve coördinaten in het platte vlak en in de ruimte behandeld. De tussen punt- en lijncoördinaten, resp. tussen punt- en vlakcoördinaten bestaande symmetrie werpt weer een geheel nieuw licht op het dualiteitsbeginsel.

Als voortzetting van de beschouwingen van afdeling E kunnen die van afdeling F gelden; in deze afdeling worden speciale homogene coördinaten, de barycentrische coördinaten, nauwkeuriger onderzocht. Ook andere aan de mechanica ontleende begrippen, zoals traagheidsgrootheden, doen dienst om meetkundige waarheden op te sporen. We willen hier wijzen op een elegant bewijs van de stelling van Stewart.

Naast de stelling van de Ceva zijn er nog andere middelen om het concurrent zijn van lijnen en vlakken aan te tonen. In afdeling G wordt daarvóor een criterium gegeven met toepassing op problemen betreffende het raken van een bol aan de zijlijnen van een n-hoek. De bekende relatie tussen de zijden van een tangentenvierhoek wordt gegeneraliseerd.

De moderne wiskunde wordt sterk beheerst door de groepentheorie.

Het verdient daarom extra vermelding, dat in dit toch in de eerste plaats voor beginners bestemd boek in afdeling H de beginselen worden uiteengezet van de theorie der transformatiegroepen met de daarbij gebruikelijke formele rekenwijze. Speciale aandacht wordt besteed aan de groep van de gelijkvormigheidstransformaties.

De theorie van machten ten opzichte van cirkels en bollen is het onderwerp van afdeling I. Met behulp van de verkregen begrippen worden lineaire cirkelstelsels en lineaire bolstelsels uitvoerig onderzocht.

De voor de geschiedenis van het dualiteitsprincipe zo belangrijke leer van de poolverwantschappen kan men aantreffen in afdeling J. Hierin worden poolverwantschappen ten opzichte van een cirkel en ten opzichte van een bol besproken, waarbij ook het geval, dat deze figuren imaginair zijn en dan de z.g. antipolariteiten definiëren, niet onvermeld blijft. Als toepassing wordt uit de stelling van Pascal voor een cirkel, die hier met behulp van de stelling van Menelaos wordt bewezen, de afleiding van de stelling van Brianchon gegeven.

In afdeling K behandelt de schrijver de zo interessante, en voor de toepassingen in de complexe functietheorie en in de electrostatica zo belangrijke, inversie. Tal van daarmede samenhangende kwesties, zoals isogonaalcirkels, raakproblemen, komen ter sprake. In het bizonder wordt de afbeelding van een vlak op het boloppervlak door middel van stereografische projectie vanuit het standpunt der inversie in de ruimte bezien.

Het begrip dubbelverhouding is niet gebonden aan de puntenreeks, aan de stralenbundel, kortom aan de projectieve fundamentaalvormen met rang één, alleen. Het kan worden overgedragen op algemenere binaire gebieden. Men vindt dit uitgevoerd in afdeling L, waar dubbelverhoudingen op de cirkelomtrek en op de regelschaar worden gedefiniëerd. Tevens wordt in deze afdeling van de dubbelverhouding gebruik gemaakt om de definitie te geven van projectieve transformatie in binaire gebieden, de homografische verwantschap; en natuurlijk met het bizondere geval van verwantschappen, waarvan het quadraat de identieke transformatie is, de involuties. We wijzen hier op de zeer eenvoudige constructies bij involuties, als deze op de cirkelomtrek worden beschouwd.

In afdeling M wordt de leer van de gelijkvormige figuren uitgebreid en verdiept. De eigenschappen van rechtstreeks en tegengesteld gelijkvormige figuren worden besproken, evenals die van de zo merkwaardige coïncidentielijnen.

Ten slotte wordt in afdeling N de meetkunde op de bol uit een ander gezichtspunt bezien dan in afdeling K. Hier wordt het projectieve vlak op de bol afgebeeld door middel van projectie van het middelpunt uit. Feitelijk wordt het boloppervlak drager van een meetkunde, waarbij diametraalpunten als niet verschillend moeten worden opgevat; de aldus verkregen stellingen bezitten dan ook een geheel ander karakter dan die welke men verkrijgt met behulp van de stereografische projectie.

Dit overzicht geeft slechts een onvolledig beeld van de grote verscheidenheid van onderwerpen, die in het boek ter sprake komen.

En we hebben nog niet eens gewezen op de fraaie en uitgebreide vraagstukkencollectie, die een essentiëel bestanddeel van het boek vormt. Het is ondoenlijk om in een kort bestek een overzicht te geven van het door de vraagstukken bestreken gebied. Voor het merendeel betekenen de vraagstukken een aanvulling en een uitbreiding van de theorie. Met een sterretje zijn de meer moeilijke en gewoonijk ook meer interessante van de overige onderscheiden. De studerende voor een akte kan in de Inleiding een overzicht aantreffen van dié vraagstukken, weke voor hem in het bizonder van belang zijn. Verder kan het uitvoerige zaak- en naamregister hulp bieden bij het zoeken naar vraagstukken over een bepaald onderwerp.

In dit boek is overal het standpunt gehandhaafd, dat de nieuwere meetkunde steunt op de Euclidische; axiomatische kwesties worden niet behandeld. Waar dit wenselijk bleek, vooral in het begin, is van de aanschouwing een ruim gebruik gemaakt.

Behoudens een uitzondering, waarop zo dadelijk zal worden teruggekomen, is de bewijsvoering zorgvuldig en degelijk; de stijl is sober en aangenaam.

Men kan natuurlijk met den schrijver van mening verschillen betreffende de wijze waarop in de meetkunde de grondslagen moeten worden gelegd. Tegen het gebruik van de aanschouwing is in het algemeen geen bezwaar, mits men de aanschouwelijk verkregen resultaten zo formuleert, dat een exacte axiomatische grondlegging daarin geen ingrijpende veranderingen brengt en in elk geval geen principiëel nieuwe gezichtspunten naar voren brengt.

Over het geheel genomen is aan deze eis in het boek behoorlijk voldaan. Een uitzondering daarop maakt evenwel afdeling C. De zorgvulige omschrijving van de in deze afdeling ingevoerde begrippen laat nogal te wensen over. In § 69 bijvoorbeeld wordt gezegd, dat het aantal figuren van een bepaalde soort door $\infty^k$ zal worden voorgesteld, als er $k$ getallen — coördinaten genoemd — nodig zijn om de figuur te beschrijven. Deze vage definitie moet nu dienen als grondslag van de bewering in § 70, dat het *aantal* coördinaten niet afhangt van de keuze van het coördinatenstelsel. Zonder nadere aanduidingen omtrent de wijze waarop de coördinaten van verschillende stelsels samenhangen is deze uitspraak onjuist. De bewering geldt stellig, als er algebraïsche samenhang is tussen de coördinaten van twee stelsels; door den schrijver wordt echter hieromtrent niets naders medegedeeld.

Verder kunnen er bezwaren worden ingebracht tegen conclusies als: $\infty^p \, . \, \infty^q = \infty^{p+q}$, en dergelijke, zonder een degelijke motivering; vooral bij beginners kunnen deze dingen de oorzaak zijn van grove denkfouten.

Aanmerking moet worden gemaakt op de manier waarop de veelvoudigheid van gegevens wordt gedefiniëerd. In § 89 wordt gezegd, dat een voorwaarde $p$-voudig is, als deze tot $p$ onafhankelijke vergelijkingen tussen de coördinaten voert. De vermelding van de betekenis van het woord onafhankelijk zou hier waarlijk geen overbodigheid kunnen heten. En wanneer in § 96 de bewering wordt aangetroffen, dat het voor een punt in de ruimte een 2-voudige voor-

waarde is om op een kromme te liggen, kan men vragen hoe door niet meer dan twee vergelijkingen tot uitdrukking moet worden gebracht, dat een punt behoort tot een biquadratische ruimtekromme van de tweede soort.

Goed beschouwd kunnen deze problemen alleen maar behandeld worden met vrij diep gaande algebraïsche hulpmiddelen. Het zou aan het boek in het geheel geen schade hebben gedaan, wanneer de schrijver de terminologie van de oneindigheid van stelsels van figuren en van de veelvoudigheid van gegevens had vermeden. Zo ergens, dan geldt hier het vermanend woord van E. Study, „dasz Präzision in geometricis nicht in perpetuum wie eine Nebensache behandelt werden darf".

Hoewel voor de opvatting, dat afdeling C minder geslaagd moet heten, gronden kunnen worden aangevoerd, wordt daardoor aan de gunstige indruk van het boek als geheel slechts weinig afbreuk gedaan. Met de grote hoeveelheid door hem verrichte arbeid heeft de schrijver velen ten zeerste aan zich verplicht.

Ten slotte worde nog melding gemaakt van de bizonder goede uiterlijke verzorging van het boek; gezien de duidelijke tekeningen, de fraaie druk en het uitstekende papier is de prijs niet te hoog. Moge het boek velen van nut zijn. J. C. H. Gerretsen.

## INGEKOMEN BOEKEN.

Van „De technische boekhandel" H. Stam, Amsterdam.

Dr. H. LOOMAN, *Beginselen der Hogere Wiskunde*, ten dienste van het M.T.O., deel II Differentiaal- en Integraalrekening. 271 blz. 131 fig. . . . . . . geb. *f* 4,25

Dr. W. K. BAART en Dr. B. MEULENBELD, *Beknopte goniometrie voor scholen met beperkt wiskunde-programma*. 130 blz. 88 fig. . . . . . . . . geb. *f* 1,35

Dezelfde schrijvers. Goniometrie voor het M.T.O. 231 blz. 133 fig. . . . . . . . . . . . . . . geb. *f* 3,75

Van „De gemeenschap" Bilthoven.

EGMONT COLERUS, *Van 1 × 1 naar integraal;* Nederlandse bewerking door Dr. J. A. A. Verlinden. 3e druk. 264 blz. 71 fig. . . . . . . . . . . . . geb. *f* 3,90

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

Prof. Dr J. G. RUTGERS, *Beknopte Analytishe Meetkunde.*
A. Het platte vlak met 99 fig. en 256 vraagtukken;
B. De ruimte met 40 fig. en 146 vraagstukken;
Alle vraagstukken met de antwoorden.
452 blz., 14 blz. met de voornaamste formules en bovendien een uitgebreid register van 12 kolommen.
**2e druk** . . . . . . . . . . . . . . . geb. *f* 9,—
Voor intekenaars op Noordhoff's Wiskundige Tijdschriften, nl. Euclides, Chr. Huygens en het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde . . . . . . . . . . . *f* 8.—

*Compositio Mathematica.* Volumen 6, fasciculus 2 (7 XI 1938).

Deze aflevering bevat artikelen van

Hans Freudenthal (Amsterdam), Robert Frucht (Triest), P. Hebroni (Jeruzalem), V. Kupradze (Tiflis), Kwok Ping Lee (Parijs), R. v. Mises (Istanbul), Rose Peltesohn (Jeruzalem), M. Rueff (Zürich), H. S. Thurston (Norwood, Mass U.S.A.) en J. Wolff (Utrecht).

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET, *Algebra voor de H.B.S.* A, **derde druk** van Algebra voor H.H S. 164 blz. 20 fig. . . . . . . . . . . . . . . *f* 2,—
Antwoorden gratis voor leraren, die dit boek op school gebruiken.

P.WIJDENES en Dr D. DE LANGE, *Rekenboek voor de H.B.S.* **Elfde, verkorte, druk.** 84 blz. 5 fig. . . gec. *f* 1,25

P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O.* I. **30e druk.** 139 blz. geb. *f* 1,40

---

## VRAAGSTUKKEN.

In deze aflevering vindt men alweer een bewijs van het vraagstuk van Morley; voor andere zie Euclides Jg. IX blz. 40—57, Jg. XIV blz. 277—284; in voorraad hebben we nog beschouwingen van Prof. Schuh.

Het blijkt, dat menigeen zijn krachten beproeft op een pittig vraagstuk als aangename afwisseling van de dagelijkse schoolzaken. We stellen ons daarom voor; zo nu en dan een vraagstuk op te geven en we verzoeken de lezers hun oplossingen in te zenden. Bij voorkeur zullen we een van de inzenders uitnodigen, alle oplossingen na te gaan, te rangschikken en ze te verwerken tot een artikel.

### VRAAGSTUK I.

In een gegeven cirkel een driehoek te beschrijven, waarvan de zijlijnen door drie gegeven punten gaan.

(Werkstuk van Castillon).

Inzending voor 1 Maart 1939 aan P. Wijdenes, Jac. Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid.

---

# WAT IS WISKUNDE?

Lezing gehouden in de Paaschvacantie 1938 te Utrecht

DOOR

Prof. Dr. Ch. H. VAN OS.

---

„Alle goddelijke afgezanten moeten wiskundigen zijn", heeft de dichter Novalis gezegd. En boven den ingang van de plaats waar Plato onderricht gaf, stond volgens de overlevering te lezen: „Niemand, die de wiskunde niet machtig is, trede hier binnen". Deze uitspraken bewijzen wel, hoe hoog de wiskunde door deze mannen geschat werd. Daarentegen is de gangbare opvatting wel, dat de wiskunde „dor" en „nuchter" zou wezen; dat de wiskundigen wonderlijke wezens zijn, die hun geheele leven besteden aan de studie van getallen en figuren, waar geen normaal mensch „iets aan heeft". Hoogstens geeft men toe, dat de wiskunde onmisbaar is voor de techniek en de natuurwetenschap; maar om haar te beoefenen ter wille van haar zelve, moet men toch wel eenigszins abnormaal zijn! Waar ligt nu, bij deze tegenstrijdige beoordeelingen, de waarheid?

Om dit na te gaan, stellen wij de vraag, waarmede de wiskunde zich eigenlijk bezighoudt. Op het eerste gezicht zou men zeggen: met allerlei dingen, waarmede wij ook in het dagelijksch leven te maken hebben. In de leerboeken der rekenkunde en algebra is sprake van aantallen knikkers en appels, van maten en gewichten, van bezittingen en schulden; in de leerboeken der meetkunde worden allerlei figuren en lichamen besproken, die wij kunnen teekenen en vervaardigen. Inderdaad ziet dit alles er zeer nuchter en praktisch uit; en niemand zal het nut van deze dingen in twijfel trekken. Bij nadere studie kunnen ons echter enkele dingen opvallen, die bij een zuiver praktische wetenschap toch niet bepaald zouden passen. In de eerste plaats wordt in de rekenkunde nu en dan gesproken over getallen, die zóó groot zijn, dat zij voor geen enkele toepassing eenige beteekenis hebben. Voor zoover wij weten, wordt het aantal atomen in ons heelal voorgesteld door een getal van enkele honderden cijfers; grootere getallen zullen dus wel nóóit optreden als het aantal eenheden van een werkelijk bestaande hoeveelheid. Toch tracht de wiskundige, indien hij daar kans toe

ziet, ook de eigenschappen te onderzoeken van getallen, die uit duizenden cijfers bestaan. In de tweede plaats: wat zijn die „punten" en „lijnen" eigenlijk, waarover de beoefenaren der meetkunde spreken? Slaan wij het oudste bekende leerboek der meetkunde op, dat van Euclides, dan vinden wij de volgende definities:

„Een punt is, wat geen deelen heeft."

„Een lijn is lengte zonder breedte."

Waar vinden wij in onze wereld dingen, die aan deze definities beantwoorden? Het is waar, dat de definities in de moderne boeken wat nuchterder klinken. Daar zegt men bijv.: „Een oppervlak is de grens van een lichaam; een lijn is de grens van een oppervlak of van een deel daarvan; een punt is de grens van een lijn of van een deel daarvan." Maar in de eerste plaats is het de vraag, of deze definities, uit een wiskundig oogpunt bekeken, wel tegen alle kritiek bestand zijn. En in de tweede plaats: Bezitten de voorwerpen, die ons omgeven, werkelijk scherpe begrenzingen, die met de „oppervlakken" der meetkunde overeenstemmen? De natuurkunde leert ons, dat die voorwerpen opgebouwd zijn uit atomen, die voortdurend in beweging zijn. Een glad geschuurde tafel is dus te vergelijken met een bijenzwerm; en evenals bij een bijenzwerm wordt de materie naar den omtrek toe ijler en houdt eindelijk op, zonder dat van een scherpe begrenzing sprake is. Is het dan misschien zoo, dat de eigenschappen der meetkunde slechts ongeveer, slechts bij benadering waar zijn? Het wil mij toeschijnen, dat het gevoel van de meeste wiskundigen zich tegen deze onderstelling krachtig verzetten zal. Voor den wiskundige zijn zijn driehoeken en cirkels, zijn veelvlakken en bollen, scherp bepaalde objecten, en de eigenschappen, die hij bewezen heeft, gelden met volmaakte nauwkeurigheid. Indien een geteekende figuur niet de eigenschappen vertoont, die zij volgens de meetkunde zou moeten bezitten, zal de wiskundige geen oogenblik aarzelen, dit toe te schrijven aan de onnauwkeurigheid der teekening, en niet aan de meetkunde.

Al deze overwegingen kunnen ons er toe leiden, de objecten der wiskunde niet te zoeken in de ons omgevende stoffelijke wereld, maar in een andere sfeer. En deze leer is dan ook reeds lang geleden verkondigd. Volgens Plato bestaat er een zeker bovenzinnelijk gebied, boven tijd en ruimte verheven. In dit gebied, de „wereld der ideeën" genaamd, bevinden zich objecten, die met

onze abstracte begrippen correspondeeren: Daar bevinden zich *de* goedheid, *de* waarheid, *de* schoonheid; daar ook bevinden zich *de* cirkel, *de* rechte lijn, *de* getallen. Alles, wat wij hier op aarde goed, waar en schoon noemen, is slechts een gebrekkige afbeelding, een schaduwbeeld van de goedheid, waarheid en schoonheid, die dáár bestaan; en zoo zijn ook de cirkels en rechte lijnen, die wij teekenen, slechts gebrekkige afbeeldingen van hun ideale prototypen. Met die ideale objecten houdt de wiskunde zich bezig en dáárvoor gelden haar stellingen. Wij zullen nu in het volgende nagaan, in hoeverre de moderne ontwikkeling der wiskunde met deze leer in overeenstemming is.

In de eerste plaats rijst de vraag, hoe wij iets van de objecten dier ideeënwereld te weten kunnen komen, als wij toch alleen maar hun onvolkomene stoffelijke vertegenwoordigers kennen. Hoe weten wij, welke eigenschappen van de stoffelijke voorwerpen met die van hun ideale prototypen overeenstemmen en welke niet? Het antwoord, dat Plato op deze vraag gegeven heeft, is het volgende. Vóór haar kluistering in een stoffelijk lichaam heeft onze ziel in die wereld der ideeën vertoefd, en zij draagt de herinnering aan die wereld sluimerende in zich. Zien wij nu de stoffelijke dingen, dan worden de herinneringen aan die vroeger geschouwde ideeën in ons gewekt, en zoo „zien" wij de ideeën in de stoffelijke voorwerpen, die er mede overeenstemmen. Zoo is alle ware kennis eigenlijk een herinnering.

De latere wijsgeeren hebben op verschillende wijzen aan de denkbeelden van Plato aangeknoopt, en zijn leer minder mythisch en meer abstract gemaakt. In het bijzonder moeten wij hier den naam van Kant noemen. Volgens Kant bezitten wij een vermogen, dat hij de „zuivere aanschouwing" noemt. Door middel van deze „zuivere aanschouwing" „zien" wij de objecten der wiskunde, zoowel de getallen als de figuren; met behulp van dit vermogen voeren wij in werkelijkheid de constructies uit, die wij op het papier slechts onvolkomen nabootsen. Daarom kunnen wij over de eigenschappen onzer figuren met apodictische zekerheid oordeelen, en, indien een *geteekende* figuur die eigenschappen niet vertoont, kunnen wij zonder aarzelen déze figuur de schuld geven. De naam „aanschouwing" wijst er op, dat wij dit vermogen eenigszins kunnen vergelijken met het stoffelijk gezichtsvermogen. Ook het woord „idee", dat zooveel beteekent als „beeld" of „vorm", doet

vermoeden, dat de ideeën kunnen worden waargenomen door een soort van innerlijk gezicht. Hiermede is het verhaal in overeenstemming van een verblijf der ziel in een wereld, waar zij de ideeën onmiddellijk aanschouwde. Dit alles leidt dus tot de voorstelling, dat de objecten der wiskunde worden waargenomen met een soort van verheerlijkt, onstoffelijk gezichtsvermogen. Is nu de ontwikkeling der wiskunde met deze voorstelling in overeenstemming?

Trachten wij ons van dit alles een meer nauwkeurig denkbeeld te vormen, dan zullen wij wel in de eerste plaats denken aan wat men in den regel het *voorstellingsvermogen* noemt: het vermogen, met gesloten oogen figuren en meetkundige lichamen voor zich te zien oprijzen. Inderdaad is dit vermogen voor den wiskundige onmisbaar, en de ontwikkeling daarvan is een van de doeleinden van het meetkunde-onderwijs. Toch is de „zuivere aanschouwing" van Kant iets geheel anders dan dit voorstellingsvermogen. Dit laatste toch is beperkt en laat ons bij ingewikkelde figuren al spoedig in de steek. Zoo is er een figuur, die bekend staat als het „hexagramma mysticum". Deze bestaat uit 60 rechte lijnen, welke elkaar in tal van punten snijden; deze punten worden dan verder door nieuwe rechte lijnen verbonden, welke elkaar weer in nieuwe punten snijden, en zoo gaat men een poosje door. Ik denk wel niet, dat er iemand is, die zich deze figuur werkelijk kan „voorstellen"; toch moeten haar eigenschappen volgens Kant met behulp van de „zuivere aanschouwing" worden afgeleid.

Gedurende de laatste halve eeuw heeft men tal van figuren leeren kennen, die nog oneindig gecompliceerder zijn, en waarbij elk „voorstellingsvermogen" ons volkomen in de steek laat. De methode, waardoor men dergelijke figuren verkregen heeft, is die van een *grensovergang* of *limietovergang* — een der belangrijkste procédé's, die in de wiskunde worden toegepast. Om eenigszins duidelijk te maken, wat een grensovergang is, beschouwen wij de rij getallen:

$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{7}{8} \quad \tfrac{15}{16} \quad \tfrac{31}{32} \quad \tfrac{63}{64} \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Het is duidelijk, dat geen der getallen van deze rij $= 1$ is; gaat men echter volgens dezelfde wet steeds verder, dan zullen de getallen, die men krijgt, steeds meer tot het getal 1 naderen, en aan deze nadering is geen grens gesteld. Men zegt nu, dat het getal 1

de *grens* of *limiet* is, waartoe de getallen van deze rij naderen. Er zijn nu tal van gevallen, waarin de limiet van een getallenrij niet een van te voren reeds bekend getal is, maar een *nieuw* getal, dat door de beschouwde grensovergang juist wordt *gedefiniëerd*. Zoo bestudeert men in de meeste leerboeken der hoogere wiskunde op een zeker oogenblik de getallenrij:

$$(1\tfrac{1}{2})^2 \quad (1\tfrac{1}{3})^3 \quad (1\tfrac{1}{4})^4 \quad (1\tfrac{1}{5})^5 \; . \; . \; . \; .$$

De limiet van deze getallenrij is dan niet een getal, dat van te voren reeds besproken was, maar een nieuw getal, dat in den regel door de letter *e* wordt aangeduid. Evenals men nu rijen van *getallen* beschouwt, kan men ook rijen van *figuren* beschouwen, en de limietfiguur onderzoeken, waartoe de figuren van zulk een rij naderen. Soms is deze een reeds bekende, eenvoudige figuur; soms echter een *nieuwe* figuur, die door den beschouwden grensovergang juist *gedefiniëerd* wordt. En deze limietfiguren blijken soms een verbazingwekkende complicatie te bezitten. Zoo is er een bepaalde limietovergang, waarbij men een rij van kromme lijnen beschouwt, die alle binnen een gegeven vierkant gelegen zijn en met steeds meer bochten zich door dit vierkant kronkelen; de limietfiguur is dan een kromme (de *kromme van Peano*), die door *elk* punt van het vierkant gaat en die dus het vierkant volkomen opvuït. Door andere grensovergangen kan men kromme lijnen verkrijgen, die in geen enkel punt een bepaalde raaklijn bezitten; kromme lijnen, die tusschen elke twee van haar punten oneindig vele windingen bezitten, enz. Als de eigenschappen van dergelijke figuren door de „zuivere aanschouwing" onderzocht moeten worden, is deze „zuivere aanschouwing" toch wel geheel iets anders dan het „voorstellingsvermogen" en dan is het verschil tusschen „zuivere aanschouwing" en „abstracte redeneering" toch wel bijzonder klein!

Tot dezelfde conclusie komt men door de beschouwing der elementen, die in den loop des tijds aan het systeem der meetkunde zijn *toegevoegd*. Men moet namelijk weten, dat de wiskundige zekere eigenaardigheden bezit, die voor zijn gansche geesteshouding karakteristiek zijn. Zoo streeft hij er steeds naar, zijn systemen zoo compleet en afgesloten mogelijk te maken; daarmede hangt samen, dat hij een afkeer heeft van stellingen, waarop uitzonderingen mogelijk zijn. Om zulke uitzonderingen te vermijden,

schroomt hij niet, tot uiterst paradoxe voorstellingen zijn toevlucht te nemen; ja, men kan bijna zeggen, dat zulke paradoxen hem een zeker genoegen verschaffen. Vanuit dit gezichtspunt zullen wij nu eens het systeem der gewone meetkunde beschouwen; en wel nemen wij als voorbeeld de onderlinge ligging van een *cirkel* en een *rechte lijn*. Zooals men weet, is het mogelijk, dat de rechte lijn den cirkel in twee punten snijdt; het is echter ook mogelijk, dat de rechte lijn geheel buiten den cirkel ligt, zoodat er *geen* snijpunten zijn. Als tusschengeval heeft men dan nog de mogelijkheid, dat de rechte den cirkel *aanraakt*. Zijn er twee snijpunten, dan kan men op eenvoudige wijze het punt vinden, dat in 't midden tusschen die beide snijpunten ligt; hiertoe toch behoeft men slechts uit het middelpunt van den cirkel een loodlijn op de snijlijn neer te laten. Deze laatste constructie is echter ook uitvoerbaar, als de rechte buiten den cirkel ligt, zoodat er *geen* snijpunten zijn. Men zou dus zeggen, dat in dit geval het punt, dat midden tusschen de beide *niet-bestaande* snijpunten gelegen is, weer *wel* bestaat. Om nu uit dit labyrinth van uitzonderingen en uitzonderingen op uitzonderingen te ontkomen, doet de wiskundige een stouten stap. Hij besluit namelijk, voortaan te zeggen, dat een rechte lijn en een cirkel elkaar *altijd* in twee punten snijden. Ligt de rechte *buiten* den cirkel, dan zegt men, dat de beide snijpunten *imaginair* zijn; *raakt* de rechte aan den cirkel, dan zegt men, dat de beide snijpunten *samenvallen*. Het voetpunt van de loodlijn, uit het middelpunt van den cirkel op de rechte neergelaten, ligt nu in elk geval midden tusschen de beide snijpunten, zoodat alle uitzonderingen en onregelmatigheden zijn weggenomen.

Heeft de wiskundige echter eenmaal een dergelijken stap gedaan, dan gaat hij met onverbiddelijke consequentie op den ingeslagen weg voort, en laat hij zich door niets terughouden. Zoo ook hier. Stellen wij ons een cirkel voor, waarvan M het middelpunt zij, benevens een rechte *l*. Deze snijden elkaar dus in twee punten. De afstand van elk dezer punten tot het punt M, is, evenals die van elk ander punt van den cirkel tot het middelpunt, gelijk aan den straal van den cirkel. Wij stellen ons nu voor, dat de cirkel *inkrimpt*, zoodat zijn straal ten slotte de waarde *nul* heeft. Hoe klein de straal ook is, telkens zal de cirkel de rechte *l* in twee punten snijden, die weliswaar imaginair zijn, maar waaraan toch een zeker „bestaan” wordt toegekend. Ten slotte komen wij dus tot de

conclusie, dat er op de rechte *l* twee punten moeten liggen, wier afstand tot het punt M de waarde *nul* heeft. Geen dezer punten valt met M samen; immers, het punt M ligt *buiten* de rechte *l*, terwijl de genoemde punten *op* die rechte liggen. Wij komen dus tot de conclusie, dat de afstand van twee punten de waarde *nul* kan hebben, *zonder dat die punten samenvallen*. Deze omstandigheid is — dit zij terloops opgemerkt — voor de relativiteitstheorie van groot belang.

Wij hebben zooeven besloten, te zeggen, dat een rechte lijn een cirkel *altijd* in twee punten snijdt. Door analoge redeneeringen komt men er toe, te zeggen, dat uit *elk* punt, onverschillig of dit binnen of buiten den cirkel ligt, *twee raaklijnen* aan een cirkel kunnen worden getrokken. Ook uit het middelpunt van een cirkel kunnen dus twee raaklijnen aan den cirkel worden getrokken! Nu bezit een raaklijn van een cirkel de eigenschap, loodrecht te staan op den straal, naar het raakpunt uit het middelpunt van den cirkel getrokken. Gaat echter de raaklijn door het middelpunt, dan valt zij met den genoemen straal samen; zulk een rechte lijn bezit dus de eigenschap, *loodrecht op zichzelf* te staan! Ik denk wel niet, dat eenige „aanschouwing" in den gewonen zin van dit woord, een dergelijke figuur voor zich kan doen oprijzen!

Wij zijn dus tot de conclusie gekomen, dat de ideale wereld der mathematische objecten gebieden bevat, die al bijzonder weinig „aanschouwelijkheid" bezitten. Nu is dit ten slotte zoo verwonderlijk niet, vooral niet, als men de mathematische wereld als een provincie van het groote ideeënrijk opvat. Immers, in dit rijk der ideeën bevinden zich ook „de waarheid", „de goedheid", „de „schoonheid", en ook deze begrippen kan men moeilijk „aanschouwelijk" noemen in den gewonen zin van het woord. Indien wij zeggen, dat wij de waarheid of de schoonheid „schouwen", dan moet dit „schouwen" dan toch in een zeer overdrachtelijken zin worden opgevat; het is veeleer een intuïtief weten, wat waarheid en wat schoonheid is. Zulk een intuïtie nu heeft in de ontwikkeling der wiskunde zeker een belangrijke rol gespeeld. Men moet namelijk niet denken, dat de wonderlijke dingen, waarover wij zooeven spraken, zoo maar zonder slag of stoot algemeen aanvaard zijn geworden. Vooral in het begin, toen men aan dergelijke gedachtengangen nog niet gewend was, is het verzet hevig

TOEN de Heer Wijdenes zich tot mij wendde met het verzoek, het handschrift van een werk over Theorie der Rekenkunde, dat hij had samengesteld ten gebruike bij het onderwijs in de beide eerste leerjaren der 5-jarige H.B.S., te onderzoeken, heb ik een ogenblik geaarzeld. De Heer Wijdenes wendde zich blijkbaar tot mij in verband met mijn hoedanigheid van lid der commissie, die op verzoek van de Inspectie van het Middelbaar Onderwijs met een onderzoek naar het onderwijs in wiskunde en verwante vakken aan de 5-jarige H.B.S. is begonnen, en als één der resultaten van haar arbeid een ontwerp-leerplan voor die vakken heeft samengesteld en aan de behandeling in het openbaar overgegeven. Dat hij zich juist tot mij wendde, vindt wellicht zijn verklaring in het feit, dat hij voor het bedoelde onderdeel (dat, weinig overeenkomstig onze verwachting, méér dan enig ander een steen des aanstoots is gebleken) van de vier leden onzer commissie mij als den hoofdschuldige-beschouwde, en, ik moet het toegeven, niet geheel ten onrechte.

Het werk volgt in hoofdzaken, en zelfs in bijna alle bijzaken, de voorstellen onzer Commissie [1]); deze overweging maakte voor mij het verzoek van den Heer Wijdenes zeer belangrijk. Echter aarzelde ik op grond van de omstandigheid, dat wij, toen wij de ons door de Inspecteurs opgedragen taak hebben aanvaard, niet hebben gedacht aan een zodanige uitbreiding van die toch reeds zeer omvangrijke werkzaamheid als gelegen zou zijn in een onderzoek van de leerboeken, welker verschijnen van ons optreden een gevolg zou kunnen zijn. Ik geloof, dat ik ook namens mijn mede-leden spreek, indien ik zeg, dat wij een zedelijke verplichting om, desge-

---

1) Hierbij moet opgemerkt worden dat de Theorie der Rekenkunde (meer in het bijzonder voor Kweek- en Normaalscholen bedoeld) van denzelfden schrijver in dezelfde richting gaat, en reeds verschenen was vóór de commissie de resultaten van haar arbeid publiceerde, maar ook dat schrijver dezes ruim een jaar na het verschijnen van het genoemde boek van den Heer Wijdenes er pas kennis mee maakte.

wenst, in deze richting werkzaam te zijn, niet kunnen erkennen.

Evenwel is het meermalen gebleken, dat een gedeelte van het verzet tegen onze voorstellen is terug te brengen tot een verkeerd begrijpen van onze bedoelingen. Dit geldt niet in de laatste plaats onze voorstellen in zake een theoretische orientering van de behandeling der rekenkunde. Men heeft, volkomen terecht, opgemerkt, dat de strijd hier *niet* kan gaan over de vraag: „exact of niet exact", maar dat men kan twisten over verschillende graden van inexactheid: daarom achtte men het van belang, te weten, welke graad van inexactheid onze commissie voorstaat. Nu is het, helaas, reeds gebleken, hoe moeilijk het is, op deze vraag een enigszins duidelijk antwoord te geven. Men moet niet menen, dat wij de vraag afdoende zouden kunnen beantwoorden door het schrijven van een leerboek, omdat men zich uit het leerboek nog slechts een zeer onzekere voorstelling kan vormen van het onderwijs; hierop kom ik aanstonds terug. Toch zou door het schrijven van een leerboek te bereiken zijn, dat men ten minste te weten kon komen, in welke omvang men verschillende onderwerpen ongeveer zou willen behandeld zien, hoe ver men b.v. zou willen gaan in de strengheid van zijn bewijzen, in de beperking van zijn stelsel van grondeigenschappen, in de nauwkeurigheid van formulering. Men heeft mij meerdere malen aangespoord, dit alles door het schrijven van een leerboek aan te duiden, maar ik heb moeten verklaren, dat ik tot het ondernemen van een zó moeilijk en zó ondankbaar werk nimmer zou besluiten. Toch voelde ik, dat het eigenlijk niet aanging, zich zo gemakkelijk verder van de zaak af te maken; aldus heeft aan mijn aarzeling een einde gemaakt de overtuiging, dat het voorstel van den Heer Wijdenes mij een uitgezochte gelegenheid bood, om, zonder een leerboek te schrijven, toch mijn denkbeelden omtrent het onderwijs in de lagere klassen enigszins nader te ontwikkelen. Ik zal hieraan wel niet behoeven toe te voegen, dat die denkbeelden niet alleen op theoretische overdenkingen steunen, doch dat zij in en uit de practijk van het onderwijs ontstaan zijn.

Het blijkt nodig te zijn, dat de aandacht wordt gevestigd op het feit, dat, wat wij voorstellen, nl. een logische behande-

ling van de rekenkunde in de eerste klassen, geen nieuwigheid is [1]). De van vele zijden komende bezwaren tegen dit gedeelte van ons leerplan, versterkte in mij de reeds door gesprekken met vele collega's gevestigde overtuiging, dat in deze richting op het ogenblik (natuurlijk in het algemeen gesproken) weinig of in het geheel niets gebeurt. Dit is echter niet altijd het geval geweest; aan deze zaken werd een 25 jaren geleden wel gedaan. Ik wil deze persoonlijke mening alleen ondersteunen door een verwijzing naar de leerboeken voor rekenkunde, die in die tijd vrij algemeen op de programma's voorkwamen; evenwel wil ik gaarne de eerste zijn om de bewijskracht van deze opmerking in twijfel te trekken.

**Een verwaarlozing.**

Nu zou men kunnen vragen: indien men algemeen van een meer grondige behandeling dier beginselen is teruggekomen, is dat dan niet een aanwijzing voor het ondoelmatige van die leerstof en tevens een waarschuwing om niet terug te keren op de weg, die men, toch stellig niet zonder reden, verlaten heeft. Het zullen wel meerdere oorzaken geweest zijn, die samengewerkt hebben tot verwaarlozing van de theorie der rekenkunde Eén der oorzaken kan wel deze geweest zijn, dat niet altijd alle docenten van die theorie véél meer geweten hebben, dan het leerboek bevatte, dat zij in de boekenlijst van hun school aantroffen, nòch de wegen kenden, die tot vermeerdering hunner kennis van dit deel der wiskunde konden leiden. En de vraag mag gesteld worden, of hiermede niet in nauw verband staat de vaak gehoorde opmerking, dat de jongelui deze dingen zo „vervelend" vinden.

**De vermoedelijke gevolgen.**

En een andere vraag (nu we op de oorzaken der verwaarlozing niet zullen ingaan): is het wiskundeonderwijs bij die verwaarlozing wèl gevaren? Kan zij niet een der dieper liggende oorzaken zijn van een zekere onvoldaanheid, die in onze kringen niet zeldzaam is? Ik vermoed toch, dat het anderen ook zo gaan zal

---

[1]) Hoe weinig „nieuw" ook sommige andere bestreden denkbeelden van onze commissie zijn, moge o.a. blijken uit het feit, dat ik, zoekende in oude programma's en boekenlijsten, in die voor de cursus 1872/1873 voor de 4de kl. van onze school een afzonderlijk werkje aantrof over de *onmeetbare getallen (en de verkorte bewerkingen)*.

als mij, nl. dat zij altijd weer stoten op hindernissen in de leerstof (van het geldende leerplan, wel te verstaan!), die blijkbaar voor de leerlingen niet „te nemen" zijn; op onderwerpen, over welke zij nooit leren spreken, doch hoogstens leren stamelen; en heeft men zich dan nooit afgevraagd, of niet al deze moeilijkheden een gevolg kunnen zijn van wat er hapert aan het onderwijs in de lagere klassen?

**Logische ontwikkeling van het getalbegrip.**

Wanneer ik dan thans overga tot een beschouwing van het leerboek, dan kan ik beginnen met de, overigens geheel voor de hand liggende, opmerking, dat het meest kenmerkende gedeelte zich bevindt aan het begin. Hier toch wordt een begin gemaakt met de logische ontwikkeling van het getalbegrip. Na de invoering van de reeks der natuurlijke getallen worden achtereenvolgens de optelling en de aftrekking van die getallen gedefinieerd en de eigenschappen van die bewerkingen vastgesteld. Onderscheid wordt gemaakt tussen fundamentele en afgeleide eigenschappen. Onder de eigenschappen der optelling wordt uitdrukkelijk uitgesproken die der onbeperkte uitvoerbaarheid en die der ondubbelzinnigheid, onder die der aftrekking die der beperkte uitvoerbaarheid.

De tot oordelen bevoegde, die de weinige bladzijden, waarin deze stof behandeld wordt, heeft gelezen, heeft hierdoor reeds een indruk van de wijze, waarop de schrijver zijn taak heeft opgevat. Die bladzijden karakteriseren de gehele inhoud van het boek zó volledig, dat ik mij bij een behandeling van het boek tot deze bladzijden zou kunnen bepalen. Ik dring er dan ook op aan, dat de lezer, die in mijn beschouwingen belang mocht stellen, thans eerst tot het lezen van dat eerste gedeelte overgaat. En dan zou ik hem willen vragen: wáár hij kan aanwijzen de regels, die zó ver boven het bevattingsvermogen van den 12-jarigen H.B.S.-leerling uitgaan, dat de behandeling ervan als bijna misdadig moet worden beschouwd. Ik moet verklaren, dat ik ze niet heb kunnen vinden.

**Aansluiting bij aan ervaring ontleende begrippen.**

Velen zullen antwoorden: „die stof is niet te zwaar, maar de wijze van behandeling is te abstract; zij past niet in de gedachtenkring van den zo jeugdigen mens; zij blijft niet in

voldoende mate in aanraking met de ervaring en kan daarom niet tot de hoofden doordringen".

Hiertegenover merk ik in de eerste plaats op, dat een redenering aan de leerlingen niet zulke onoverkomelijke moeilijkheden biedt, als men wel eens bij wijze van axioma wil beweren; in zijn zeer duidelijk opstel, waarin hij overigens het onderhavige gedeelte van het concept-leerplan bestrijdt, zegt ook Dr. Heyting[1]) „.... dat de meeste leerlingen abstracte redeneringen verrassend goed volgen en er de betekenis van doorzien".[2]) In de tweede plaats echter moet ik er op wijzen, dat het slechts schijnbaar is, dat in de voorgestelde wijze van behandeling de steun der ervaring zou worden versmaad. Het is er echter slechts om te doen, de begrippen, die aan de leerlingen door „herhaald oefenen", dus door de ervaring, eigen geworden zijn, op zodanige wijze te formuleren, dat een grondslag ontstaat, waarop voortbouwen mogelijk wordt.

Dat de lezing van het leerboek, dat we bezig zijn te beschouwen, gemakkelijk de indruk kan wekken, alsof „het

---

[1]) Bijvoegsel, 3e Jaargang pg. 21 en 22.

[2]) Ook thans wordt de vraag, of twaalf à dertienjarige leerlingen rijp geacht kunnen worden voor het logisch redeneren, dat voor een enigszins bevredigende ontwikkeling van de rekenkundige begrippen onmisbaar is, nog zeer verschillend beantwoord. Het is me gebleken, dat de leerlingen van onze scholen op deze leeftijd een mate van rijpheid hebben bereikt, die het *aanleren* van de beginselen van het logisch redeneren zeker mogelijk maakt. KOHNSTAMM heeft een zeer diepgaande kritiek gegeven op de methoden, die men bij onderzoekingen naar de ontwikkeling van de intelligentie veelal heeft toegepast, en in aansluiting daaraan zelf een onderzoek ingesteld, waarbij de door hem gesignaleerde foutenbronnen werden vermeden (Mededelingen Nutsseminarium No. 26, Paed. Stud. 1934). „De kerngedachte, waarvan ons onderzoek uitgaat, is . . . . deze, dat logisch denken niet het product is van een spontaan rijpingsproces, niet door evolutie uit vegetatief-animale levensvormen geboren wordt, maar een doorbraak is, die alleen tot stand komt en kan komen door menselijk contact, door het individueel overnemen van wat gemeenschappelijk-menselijk reeds veroverd en gevormd is." Hij concludeert, „dat wij de gangbare meningen over de onlogischheid van de kinderlijke geest aanmerkelijk moeten wijzigen." „Kinderen reeds van zes en zeven, zeker die van acht jaren zijn tot redeneringen in staat, die nog maar heel weinig aanschouwelijke inhoud hebben; natuurlijk kunnen die redeneringen echter niet *geheel* inhoudloos worden; in deze zin zijn ook de meest abstract-mathematische gedachtengangen nog altijd niet *zuiver* formeel."

van nu af met het beroep op de ervaring maar eens uit moet zijn", is een gevolg van het feit, dat men blijkbaar dikwijls uit het oog verliest, dat een voortreffelijk leerboek een zeer onjuist beeld kan geven van het onderwijs. Het is nodig, hierop de aandacht te vestigen, omdat de rol, die het leerboek bij het onderwijs te vervullen heeft, dikwijls schromelijk overschat wordt, en men meent, zich uit het leerboek een indruk van de gang van het onderwijs te kunnen vormen [1]).

**Rol van het leerboek.**

Er bestaan boeken, blijkbaar geschreven met de bedoeling, den leraar overbodig te maken. Niet alleen wordt niets verzwegen, dat gezegd had kunnen worden, geen opmerking, waartoe de leraar tot verduidelijking aanleiding zal vinden, wordt aan het boek onthouden, maar zelfs worden de vragen, die hij zijn leerlingen zal hebben te stellen, met zo tergende volledigheid opgenomen, dat men zich nauwelijks den docent kan voorstellen, die bij dit alles zijn kalmte weet te bewaren. Zulke werken mogen voortreffelijke diensten bewijzen aan hen, die zich zonder leiding door de wetenschap een weg moeten banen, en ook nuttig zijn in handen van beginnende docenten, als leerboeken voor schoolgebruik zijn ze m.i. af te keuren. Verdelen we nl. onze werkzaamheid in deze drie gedeelten: 1°. het bijbrengen van, 2°. het formuleren van, 3°. het vastleggen van de begrippen, dan heeft het leerboek voor schoolgebruik alleen bij het onder 3°. genoemde gedeelte een rol te vervullen. Het verwerven der begrippen zowel als de formulering heeft plaats in de klasse bij de samenspreking tussen leraar en klasse; het leerboek behoeft slechts den leerling behulpzaam te zijn bij het memoriseren van het in de les verkregen resultaat. Bij deze opvatting, die de schrijver blijkbaar met mij deelt, komt aan het leerboek een slechts zeer bescheiden plaats toe.

Uit het feit, dat in het leerboek een beroep op de ervaring bijna steeds is vermeden, mag dan ook in het geheel niet de gevolgtrekking worden gemaakt, dat bij de behandeling zulk een beroep verboden waar is. Immers zou het een niet geringe didactische fout zijn, indien men niet aanknoopte bij de kennis, die de leerlingen zich reeds door „herhaalde oefening" eigen

---

1) Zie b.v. de bekende brochure van Prof. Langelaan: „De tekortkomingen van ons middelbaar onderwijs", pag. 18 en verder.

gemaakt hebben. Het zij mij vergund dit met een enkel voorbeeld toe te lichten. Het hoofdstuk over Optelling begint met de bepaling der optelling als herhaalde toepassing van de elementaire bewerking in de rij der natuurlijke getallen, met de eigenschappen der onbeperkte uitvoerbaarheid en der ondubbelzinnigheid, met de associatieve en de commutatieve eigenschap der optelling. Nu acht ik het niet denkbaar, dat één docent op deze wijze de les zal beginnen; hij zal er de les mede eindigen. Hij zal beginnen met het samenvoegen van hoeveelheden en hierbij denken aan een concreet voorbeeld; b.v. hij zal aan dozen denken, die opv. 1, 2, 3 gelijke knikkers bevatten, en die gemakshalve opgesteld zijn in de volgorde, waarin die aantallen voorgesteld worden in de rij der natuurlijke getallen. Hij zal de inhoud van twee der dozen verenigd denken, door de knikkers uit de ene doos A stuk voor stuk te voegen bij die in de andere doos B, en opmerken, dat het aantal der daarbij gevormde hoeveelheid steeds voorkomt in een der (meer rechts geplaatste) dozen, indien men er maar genoeg heeft opgesteld, maar slechts in één er van. Voorts zal hij opmerken, dat het resultaat niet anders wordt, indien hij B in A in plaats van A in B ledigt. Vervolgens zal hij een derde doos C te hulp roepen en opmerken, dat het onverschillig is, of we B in A ledigen en daarna C bij de nieuwe hoeveelheid voegen dan wel de inhoud van B en C verenigen en de daardoor ontstane hoeveelheid in A brengen. Hij heeft hiermede nog niets onderwezen, wat de leerlingen niet reeds lang wisten, maar zal zorg dragen, dat zij die kennis zuiverder in woorden brengen dan zij gewoon waren te doen. Hij zal daarna overgaan tot de optelling van natuurlijke getallen, waarbij hij het spreken over hoeveelheden vermijdt, maar toch (gelukkig!) niet kan beletten, dat de leerlingen de zo even gebruikte voorstellingen bewaren. De opvatting der optelling, die in de zo even geschetste inleiding werd gehuldigd (die de leerlingen reeds eigen is) en die berust op het tellen van de elementen ener verzameling, die de vereniging is van twee verzamelingen zonder gemeenschapplijke elementen, is in wezen verschillend van de andere (waartoe we willen komen), waarbij het optellen van de getallen *a* en *b* beschouwd wordt als het éérst tellen tot *a* en vervolgens verder tellen, maar men zal ervaren, dat de

overgang zonder sprong kan geschieden en den leerlingen generlei moeilijkheid bereidt.

Zo zal dus het hulpmiddel der ervaring niet vermeden mogen worden; zelfs zou het op deze trap van ontwikkeling niet alleen didactisch, maar zelfs wetenschappelijk onjuist zijn, het als een minderwaardig hulpmiddel voor te stellen. Wel zal men er gaandeweg en met de uiterste voorzichtigheid naar moeten streven, het aandeel, dat de ervaring heeft bij de totstandkoming der begrippen, te verkleinen.

Vraagt men nu naar de wetenschappelijke strengheid der gegeven uiteenzetting (we bepalen ons nog steeds tot de eerste bladzijden), dan roert men, zoals ons allen bekend is, een uiterst tere snaar aan. Dat het *niet* mogelijk is, een behandeling te geven, die de toets der hedendaagse kritiek kan doorstaan, en tevens voor ons doel geschikt is, hieraan twijfelt niemand. Echter geloof ik, dat velen met mij eens zullen zijn, dat de wijze, waarop de schrijver de moeilijkheden overwint (of vermijdt!) lofwaardig is, en dat zijn oplossing van het vraagstuk er één is, die, hoewel niet onaanvechtbaar, toch zeer bevredigend mag worden genoemd.

Wat nu de zaak der grondeigenschappen aangaat, hier is de moeilijkheid waarschijnlijk het grootst. De schrijver zegt er weinig van, vermoedelijk ook bij zijn onderwijs, en wellicht heeft hij gelijk. Elke leraar is vrij, de zaak naar believen nader toe te lichten, indien dit hem (of den leerlingen) een behoefte is; de een zal zeggen, dat ze niet bewezen kunnen worden, de ander, dat zij niet bewezen behoeven te worden.

**Ongelijkheden.** Voordat ik verder ga met de beschouwing van het overige gedeelte van het leerboek, wil ik nog slechts de aandacht vestigen op de zorgvuldigheid, waarmede de ongelijkheden worden behandeld, een onderwerp, dat nogal eens schijnt te worden verwaarloosd, en dat toch in de verdere ontwikkeling in belangrijkheid niet voor de gelijkheden onderdoet.

Ik ben bij de eerste bladzijden langer blijven stilstaan, omdat de bezwaren van didactische en wetenschappelijke aard, die men tegen de inhoud van die eerste bladzijden zal willen maken, naar aanleiding van de inhoud van vele andere zullen kunnen worden herhaald, en ook de weerlegging van die bezwaren op overeenkomstige wijze zal kunnen plaats hebben.

Getal nul.

Op de behandeling van de aftrekking volgt de invoering van het getal nul. Ik geloof, dat ik hier tot een onderwerp genaderd ben, dat in het reeds aangehaalde ontwerp-leerplan in hoge mate de tegenzin van vele collega's heeft opgewekt, en dat ik niettemin tot zijn meest onmisbare punten blijf rekenen. Het kost toch weinig moeite om te zien, dat vele moeilijkheden van schijnbaar verschillende aard, waarover men steeds weer in onderscheiden delen der analyse struikelt, tot de ongewenste inmenging van dit getal nul zijn terug te brengen.

Ik zal geen opsomming behoeven te geven van de moeilijkheden, die ik hier op het oog heb, maar wil toch één punt als voorbeeld kiezen. Ik bedoel: het bedrag van de tangens voor de waarde 90° van het argument, als dit argument het interval 0° — 180° doorloopt. Ik heb bij collega's, die het onderwijs niet graag „te moeilijk" voor de leerlingen maken, de volgende zienswijze ontmoet: „voor 90° is de tangens zowel $+\infty$ als $-\infty$, hetgeen geen verwondering behoeft te wekken, daar $-\infty = +\infty$ is". Zelfs heb ik deze rechtvaardiging horen toelichten door de mededeling, dat „toch ook de beide oneindige punten van een rechte lijn samenvallen". Ik vermoed, dat hun leerlingen door deze voorstelling minder overtuigd zijn geworden dan verrast, en geloof nog steeds, de voorkeur te moeten geven aan de „moeilijke" oplossing van de zwarigheid, die daarin bestaat, dat een hoek van 90° géén tangens heeft, omdat de tangens gedefinieerd is als een quotient, doch van een quotient alleen een bepaling gegeven is voor die gevallen, waarin de deler van nul verschillend is.

Uit het laatste blijkt reeds, hoe noodzakelijk het definiëren van de bewerkingen is bij elke uitbreiding van het getalgebied, *niet* om den leerlingen moeilijkheden te bereiden, maar *wel* om hun onnodige en onnutte moeilijkheden te besparen [1]).

---

[1]) Verg. G. Mannoury, „Euclides" V, blz. 48/49. „Er is evenwel nog een andere, en vrij wat ernstiger moeilijkheid bij het aanvankelijk algebraonderricht te overwinnen . . . . en wel een moeilijkheid, waarvan zelfs het bestaan door vele docenten nimmer wordt opgemerkt. Zij is gelegen in de misverstanden, voortspruitende uit de geleidelijke uitbreiding van het getalbegrip . . . ." Zie ook H. J. E. Beth, „De ontwikkeling van het getalbegrip", Euclides" VII, blz. 270.

Die definiering der bewerkingen bij elke uitbreiding van het getalgebied zou echter weder bemoeilijkt worden, indien zij niet ook reeds voor de bewerkingen met natuurlijke getallen naar behoren had plaats gehad.

De schrijver voert dan met zo weinig woorden, als hij nodig heeft (de docent zal er wel meer gebruiken) het getal nul in en definieert hier de bewerkingen $a + o$, $o + a$, $o + o$, $a - a$ en $a - o$.

**Negatieve getallen.** Onmiddellijk aansluitend aan de invoering van nul gaat de schr. thans over tot de invoering der negatieve getallen en definieert hij de optelling en de aftrekking in het gebied der *gehele* getallen. Hierin wijkt hij af van wat aanvankelijk in mijn bedoeling heeft gelegen. Ik had wèl tot de invoering van de negatieve getallen willen overgaan, in aansluiting aan de invoering van het getal nul, maar had voor de definiering van de bewerkingen met die getallen naar de algebra willen verwijzen, om in de rekenkunde verder van de negatieve getallen af te zien. (Het leerplan 1937 noemt de negatieve getallen voor de eerste klas).

**Versmelting rekenkunde en algebra.** Het is duidelijk, dat we hier niet met een aangelegenheid van wetenschappelijk doch van zuiver practische aard te doen hebben. Vóór een versmelting van wat wij algebra en rekenkunde plegen te noemen tot één onderdeel der wiskunde, is logisch âlles, practisch véél te zeggen. Vóór een afscheiding, zo spoedig als mogelijk is, van een gedeelte als rekenkunde is practisch óók wel wat te zeggen. De zaak is overigens van te weinig belang, dan dat ik er nader op zou behoeven in te gaan. *Alleen wil ik erop wijzen, dat m.i. de gebruikers van het boek goed zullen doen, b.v. in de eerste 2 maanden alle voor Rekenkunde en Algebra beschikbare tijd, dus 4 uren, voor Rekenkunde te gebruiken,* zoals, naar ik vermoed, hier en daar reeds gebeurt, om eerst daarna, b.v. bij de breuken, de scheiding te voltrekken.

Men zal moeten toegeven, dat de schrijver bij de invoering der negatieve getallen, een der neteligste onderwerpen, die we ons denken kunnen, eenvoudig en helder is. Wanneer men ook hier met bezwaren van wetenschappelijke aard komt, zal men den schrijver niet verrassen. Dat echter, zowel wetenschappelijk als didactisch, zijn behandeling bij de tegen-

woordig algemeen gebruikelijke een flinke stap vóóruit betekent, zal menigeen moeten beamen.

**Repeterende breuken.** Het is niet mijn bedoeling, het leerboek verder op de voet te volgen. Echter wil ik nog twee onderwerpen naar voren brengen, die velen belang zullen inboezemen. In de eerste plaats dan de behandeling van de repeterende breuken. Men zal zien, dat het woord „limiet" *niet* wordt genoemd, en dat alleen, zoals ook in ons ontwerp-leerplan als wenselijk werd uitgesproken, tot dat begrip „voorzichtig genaderd" wordt. Zoals van zelf spreekt, komt men tot de repeterende breuken door de formele voortzetting van de bewerking der deling; men laat zien, dat elke onvereenvoudigbare breuk, waarvan de noemer niet uitsluitend factoren 2 en 5 bevat, tot het ontstaan van zulk een repeterende breuk aanleiding geeft, terwijl omgekeerd elke repeterende breuk ontstaan kan gedacht worden uit een onvereenvoudigbare gewone breuk. Men kan dus spreken van een repeterende en haar voortbrengende breuk, maar gaat niet verder. Men heeft dan toch gelegenheid op de voortbrengende breuken de theorie der deelbaarheid toe te passen (in het hoofdstuk Deelbaarheid is behandeld, in plaats van de deelbaarheid door 3 en 9, de deelbaarheid door $10^p - 1$, waarin $p$ een natuurlijk getal is, en zijn delers; men vindt in het boek een tabel van de delers van $10^p - 1$ voor $p < 11$).

De schrijver merkt nog op, dat men wel eens de voortbrengende breuk *gelijk* noemt aan de repeterende, doch dat dit zonder meer niet aangaat. Deze opmerking zal de leerlingen tot nadenken stemmen, en ik vermoed, dat, als zij niet uit zich zelf tot vragen overgaan, de leraar hen daartoe zal weten te prikkelen. Dan zal hij er hen op kunnen wijzen, dat $^4/_9$ en $0,\dot{4}$ toch onmogelijk aan elkaar gelijk *kunnen* zijn, want dat $^4/_9$ een bepaalde waarde heeft, terwijl het teken $0,\dot{4}$ geen bepaalde waarde kàn voorstellen, aangezien immers de waarde groter wordt, naarmate men meer vieren schrijft (dat men het woord „oneindig" niet uitspreken zal, en het ook van de leerlingen niet dulden zal, is m.i. zo duidelijk, dat ik daarover verder mag zwijgen). Men zal ervaren, dat deze opmerking hen in hoge mate onbevredigd laat. Echter late men zich hierdoor niet verontrusten: het is beter dan dwaasheden toe te laten als: „verschillen, die zo klein

mogelijk zijn", over „het kleinst mogelijke getal", over „het getal, dat zo klein is, als je maar wilt", die de bron van véél kwaad kunnen worden. Men bedenke, dat het af en toe *on*bevredigd laten een machtig hulpmiddel is voor den docent; door méér zulke ogenblikken van onbevredigd zijn te doen ontstaan bereidt men de bodem voor, waarin te zijner tijd het limietbegrip zal worden geplant.

**Wat is $\sqrt{2}$?** In de tweede plaats nog een enkel woord over de betekenis van de vierkantswortel uit een getal, dat niet tot de volkomen vierkanten behoort. Nadat de vierkantsworteltrekking uit een natuurlijk getal is gedefinieerd, de rij der volkomen vierkanten is behandeld en aangetoond is, dat de vierkantsworteltrekking een niet altijd uitvoerbare bewerking is, wordt de rekenwijze besproken, die tot de vierkantswortel uit natuurlijke en decimale getallen (indien hij er is!) voert. Vervolgens kan de leraar duidelijk maken, welke grote betekenis gelegen is in de vraag, of $\sqrt{2}$ iets kan betekenen. Hij kan opmerken, dat op grond van de bepaling van vierkantsworteltrekking het teken $\sqrt{2}$ nog geen zin heeft, maar dat het toch wel heel bedenkelijk zou zijn, indien we er geen betekenis aan konden hechten. Immers voert de berekening van de lengte van de diagonaal van een vierkant, waarvan de zijde gelijk is aan de eenheid van lengte, tot een „getal", waarvan het vierkant gelijk zou moeten zijn aan 2. En indien zulk een „getal" niet zou bestaan, dan zouden rekenkunde en meetkunde met elkaar in strijd geraken.

Deze en dergelijke opmerkingen komen in het leerboek, m.i. terecht niet voor. De schrijver stelt de rij van decimale getallen op, die ontstaan, als men de algorithmus der worteltrekking toepast (alsof hij betekenis had!) en telkenmale één cijfer verder gaat; eveneens de rij, die uit de vorige ontstaat door steeds het laatste cijfer met de eenheid te vermeerderen. Hij geeft een eenvoudige beschouwing over deze beide reeksen, en besluit met te zeggen: „Het maakt de indruk, dat een „getal" bestaat, dat tussen de getallen der beide rijen gelegen is, en waartoe men, juist door middel van de getallen dier rijen, voortdurend van beide zijden dichter nadert. Dit zal dan een „getal" moeten zijn van geheel andere soort als de getallen, die we hebben leren kennen, want we zijn niet in

staat het met een beperkt aantal cijfers aan te duiden".

Verder gaat de Schrijver hier *niet*, maar hij zegt, dat men inderdaad het bestaan van zulk een getal aanneemt en het aangeeft door het teken $\sqrt{2}$.

**Benaderende waarden.** Voordat ik de bespreking van de inhoud besluit, wil ik nog vermelden het laatste hoofdstuk, waarin behandeld wordt het onderwerp: benaderde waarden. Het is, in verband met het doel, waarmede het blijkbaar is samengesteld, van een enigszins ander karakter dan de andere hoofdstukken. In het bijzonder met het oog op het natuurkunde-onderwijs is het onderwerp „benaderde waarden" in het ontwerp-leerplan opgenomen. De leraren in natuurkunde zullen het er wel over eens zijn, dat zij tegenwoordig weinig resultaat zien van dit deel van het wiskunde-onderwijs in de 2de klasse. Ik heb dikwijls de indruk gekregen, dat het onderwerp bij de wiskunde-collega's weinig in trek is, hetgeen enigszins te verklaren is uit de omvang, waarin, en de wijze waarop het in de leerboeken wordt besproken.

**Geen verkorte bewerkingen.** Verkorte bewerkingen voeren de leerlingen alleen uit in onze tegenwoordigheid; zij schrijven veel liever alle cijfers op, die bij de bewerking ontstaan. Voor onze leerlingen, die we in de 3de klasse een logarithmentafel in handen zullen geven (over de nauwkeurigheid bij het werken van deze tafels zou óók nog heel wat te zeggen zijn!) heeft het aanleren van verkorte bewerkingen weinig zin. Verder zijn de getalwaarden der natuurkundige grootheden steeds opgegeven nauwkeurig op een halve eenheid der laatste decimaal, en werkt men slechts bij hoge uitzondering met de aanwijzingen „te groot" en „te klein". Door met deze beide overwegingen rekening te houden, is de schrijver erin geslaagd een eenvoudige behandeling van de bewerkingen met benaderde waarden samen te stellen, waarvan ik goede hoop heb, dat zij zowel in de ogen der wiskundigen als in die der natuurkundigen genade zal kunnen vinden. Hoewel geen verkorte bewerkingen opgenomen zijn, zullen zij behandeld vinden $\frac{1}{1 \pm \delta}$, $(1 \pm \delta)^2$ en $(1 \pm \delta)^3$. De leerlingen zullen zien, dat het geen knoeierij is, indien $(1 + \lambda)^3$ door $1 + 3\lambda$ vervangen wordt, mits de grootte van $\lambda$ en de fout in $\lambda$ aan bepaalde voorwaarden voldoen.

In dit hoofdstuk vooral zal men den schrijver niet van onmatige strengheid kunnen beschuldigen; ook wordt bij het bepalen van de graad van nauwkeurigheid in de regel méér op de eenvoud van voorstelling dan op een verovering van een zo groot mogelijk aantal zekere cijfers gelet.

**Omvang der leerstof.** De docenten, die zich overigens met de in het leerboek gevolgde gedachtengang wel zouden kunnen verenigen, zullen vragen of al deze stof in deze omvang in twee jaren af te handelen en te verwerken is. Een objectief antwoord op deze vraag is niet mogelijk. Men moet echter bedenken, dat, zoals reeds opgemerkt is, voor het eerste gedeelte (b.v. tot aan de breuken) 4 uren per week beschikbaar zijn. Verder schijnt mij ook de verzameling vraagstukken minder bedoeld om geheel te worden doorgewerkt dan om keuze door den docent mogelijk te maken. Men zal overlading willen zien in het aantal eigenschappen, b.v. in de hoofdstukken optelling en vermenigvuldiging; het is echter duidelijk, dat weinig kan worden besnoeid, zonder dat het verband, waarom het juist te doen is, verloren gaat.

**Volgorde der onderwerpen.** De schrijver zal trouwens zelf wel niet in de waan verkeren, dat met zijn leerboek alle moeilijkheden weggevallen zijn: géén leerboek zal dit kunnen bereiken. Zo zijn alle eigenschappen der evenredigheden aangetoond voor evenredigheden met meetbare verhoudingen; toch zal men reeds in het begin der 2de klasse de evenredigheden van lijnstukken *moeten* behandelen [1], en al heel spoedig de onmeetbare verhoudingen ontmoeten, die men wèl uit de leerboeken, maar nièt uit de meetkunde verbannen kan. In het leerboek wordt het woord „onmeetbaar" eerst ontmoet (en het begrip slechts vaag aangeduid) in het hoofdstuk der vierkantsworteltrekking. Bij de gekozen volgorde, die ook mij de meest logische schijnt, is men hiertoe pas halverwege de tweede klasse genaderd. Er is echter niet zo veel tegen, het hoofdstuk over rechtstreeks en omgekeerd evenredige afhankelijkheid (dat het meest natuurlijk bij dat over evenredigheden aansluit) even te laten wachten en éérst de vierkantsworteltrekking te behandelen; zelfs heeft dit niet alleen voor

---

[1]) Hierover denk ik thans anders; over de volgorde van de onderwerpen in de meetkunde schreef ik in „Euclides", Jg. 13 blz. 276 en 277.

de meetkunde, maar ook voor de algebra zeer duidelijke practische voordelen. En zo zullen er veel meer moeilijkheden kunnen worden genoemd, waarvoor echter de docent naar eigen inzicht een oplossing zal weten te vinden.

**Conclusie**

Wanneer ik ten slotte mijn indrukken samenvat, dan kan ik mijn mening aldus in woorden brengen: dat de schrijver een leerboek heeft samengesteld; dat stellig met behulp van door belangstellende docenten opgedane ervaringen voor verbetering vatbaar zal blijken, doch dat reeds thans, in handen van leraren, die met mij van oordeel zijn, dat het leggen van een deugdelijke grondslag in de lagere klassen mogelijk en nodig is, uitstekende diensten zal kunnen bewijzen.

Ik eindig met het uitspreken van de wens, dat den schrijver de zo even bedoelde belangstelling en medewerking in ruime mate mogen ten deel vallen.

Deventer. H. J. E. BETH.